Operazioni algebriche

(Somma [opposto e differenza] / Prodotto [inverso e quoziente])

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Somma / Opposto / Differenza
- Prodotto / Inverso / Quoziente
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Somma / Opposto / Differenza

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Somma

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ si definisce la **somma** come

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

Si esegue la somma delle parti reali e delle parte immaginarie

Opposto

Se $z = a + bi$ si definisce l'**opposto** come

$$\begin{aligned} -z &= -(a + bi) \\ &= (-a) + (-b)i \end{aligned}$$

Si esegue l'opposto della parte reale e della parte immaginaria

Proprietà: $z + (-z) \ = \ (-z) + z \ = \ 0 + 0i = 0$ (elemento neutro dell'addizione)

Differenza

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ si definisce la **differenza** come

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\ &= (a + bi) + (-c - di) \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

La differenza è la somma con l'opposto

Prodotto / Inverso / Quoziente

Prodotto

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ si definisce il **prodotto** come

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)\cdot(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Inverso

Se $z = a + bi$, con $z \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned} z^{-1} = (a+bi)^{-1} &= \frac{1}{a+bi} \\ &= \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} \qquad\qquad \text{(razionalizzando)} \\ &= \frac{a-bi}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Proprietà: $z \cdot z^{-1} \; = \; z^{-1} \cdot z \; = \; 1 + 0i = 1$ (elemento neutro della moltiplicazione)

Quoziente

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \neq 0$ si definisce il **quoziente** come

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = z_2^{-1} \cdot z_1$$

Operazioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$

Se $z_1 = a + 0i$ e $z_2 = c + 0i$ si ha:

- Somma e differenza:

$$z_1 \pm z_2 \;=\; (a+0i) \pm (c+0i) \;=\; (a \pm c) + 0i$$

- Prodotto:

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; (a+0i) \cdot (c+0i) \;=\; ac + 0i$$

- Divisione (se $z_2 = c + 0i \neq 0$ i.e. $c \neq 0$):

$$(a+0i) \cdot (c+0i)^{-1} \;=\; (a+0i) \cdot \left(\frac{1}{c} + 0i\right) \;=\; \frac{a}{c} + 0i$$

Quindi, si possono estendere a $\mathbb{C}$ tutte le operazioni algebriche di $\mathbb{R}$ usando le medesime notazioni

Esempi

Esempio 1

Dati i numeri complessi $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = 2 + i$ calcolare

- $z_1 + z_2$
- $z_1 - z_2$

Esempio 1

Soluzione

Da $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = 2 + i$ si ha

- somma:

$$z_1 + z_2 \;=\; (1 - 2i) + (2 + i) \;=\; (1 + 2) + (-2 + 1)i \;=\; 3 - i$$

- opposto:

$$-z_2 \;=\; -(2 + i) \;=\; -2 - i$$

- verifica dell'opposto: $z_2 + (-z_2) \;=\; (2 + i) + (-2 - i) \;=\; 0 + 0i = 0$
- differenza:

$$z_1 - z_2 \;=\; z_1 + (-z_2) \;=\; (1 - 2i) + (-2 - i) \;=\; (1 - 2) + (-2 - 1)i \;=\; -1 - 3i$$

Esempio 2

> Dati i numeri complessi $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 + 2i$ calcolare
>
> - ${z_2}^{-1}$
> - $\frac{z_1}{z_2}$

Esempio 2

Soluzione

Da $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 + 2i$ si ha

- inverso di z_2:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5}$$

- verifica dell'inverso:

$$z_2 \cdot z_2^{-1} = z_2^{-1} \cdot z_2 = (1+2i) \cdot \frac{1-2i}{5} = \frac{1 - \cancel{2}i + \cancel{2}i - 4i^2}{5} = 1 + 0i$$

- calcolo di $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = (2+i) \cdot \frac{1-2i}{5} = \frac{2 - 4i + i - 2i^2}{5} = \frac{2 + 2 + (-4+1)i}{5} = \frac{4-3i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

Esempio 3

> Dati i numeri complessi $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 + 2i$ trovare z tale che
>
> $$\bar{z} = z_1 - z_2$$

Soluzione

Da $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 + 2i$ si ha

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (1 + 2i) = 1 - i$$

Se $z = a + bi$ allora $\bar{z} = a - bi$, e l'equazione $\bar{z} = z_1 - z_2$ diventa

$$a - bi = 1 - i \quad \Longrightarrow \quad (a - 1) + (-b + 1)i = 0 = 0 + 0i$$

Esempio 3

$$(a-1)+(-b+1)i=0=0+0i$$

Uguagliando le parti reali e immaginarie dell'equazione si ha

$$\begin{cases} a-1=0 \\ -b+1=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \implies z=1+i$$


FINE
Manolo Venturin