Forma algebrica

(Parte reale e immaginaria / Coniugato)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Definizione di numero complesso e di parte reale e immaginaria
- Numeri complessi coniugati
- Uguaglianza e zero
- Estensione dei reali nei complessi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Definizione di numero complesso e di parte reale e immaginaria

L'insieme dei numeri complessi è definito come:

$$\mathbb{C} = \left\{z\colon z = a + bi,\ a,\ b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\right\}$$

- $a = \mathrm{Re}(z)$: è detta **parte reale**
- $b = \mathrm{Im}(z)$ è detta **parte immaginaria**
- se $b = 0$ si ottiene un numero reale (con parte immaginaria nulla)
- se $a = 0$ si ottiene un numero immaginario puro (con parte reale nulla)

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Numeri complessi coniugati

Due numeri complessi z_1 e z_2 si dicono **complessi coniugati**, i.e. $z_1 = \overline{z_2}$ sse

- hanno la stessa parte reale, i.e. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$
- hanno la parte immaginaria opposta, i.e. $\mathrm{Im}(z_1) = -\mathrm{Im}(z_2)$

Allora, se z è della forma

$$z = a + bi$$

il suo complesso coniugato $\overline{z}$ sarà della forma

$$\overline{z} = a - bi$$

Uguaglianza

Due numeri complessi z_1 e z_2 si dicono **uguali**, i.e. $z_1 = z_2$, se hanno:

- la stessa parte reale, $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$
- la stessa parte immaginaria, $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$

Zero

- Scrittura abbreviata: $0 = 0 + 0i$
- Uguale a zero: $z = 0$ sse $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = 0$
- Diverso da zero: $z \neq 0$ sse $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ o $\mathrm{Im}(z) \neq 0$

Estensione dei reali nei complessi

I numeri reali sono un sottoinsieme dei numeri complessi, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, i.e. sono della forma:

$$z = a + 0i$$

con la parte immaginaria nulla, i.e. $\mathrm{Im}(z) = 0$

Esempi

Esempio 1

> Dato il numero complesso $z = 1 - 2i$ calcolare
>
> - $\mathrm{Re}(z)$
> - $\mathrm{Im}(z)$
> - $\overline{z}$

Soluzione

Da $z = 1 - 2i$ si ha

- $\mathrm{Re}(z) = 1$
- $\mathrm{Im}(z) = -2$
- $\overline{z} = 1 + 2i$

Esempio 2

> Fattorizzare, nel campo dei numeri complessi, l'equazione di secondo grado (con $\Delta < 0$)
>
> $$z^2 - 2z + 5 = 0$$
>
> ed eseguirne la verifica

Soluzione

Le radici di $z^2 - 2z + 5 = 0$ sono

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}}{2} = 1 \pm 2i$$

Nota: Spiegheremo meglio in seguito che $\pm\sqrt{-1} = \pm i$ (radici di un numero complesso)

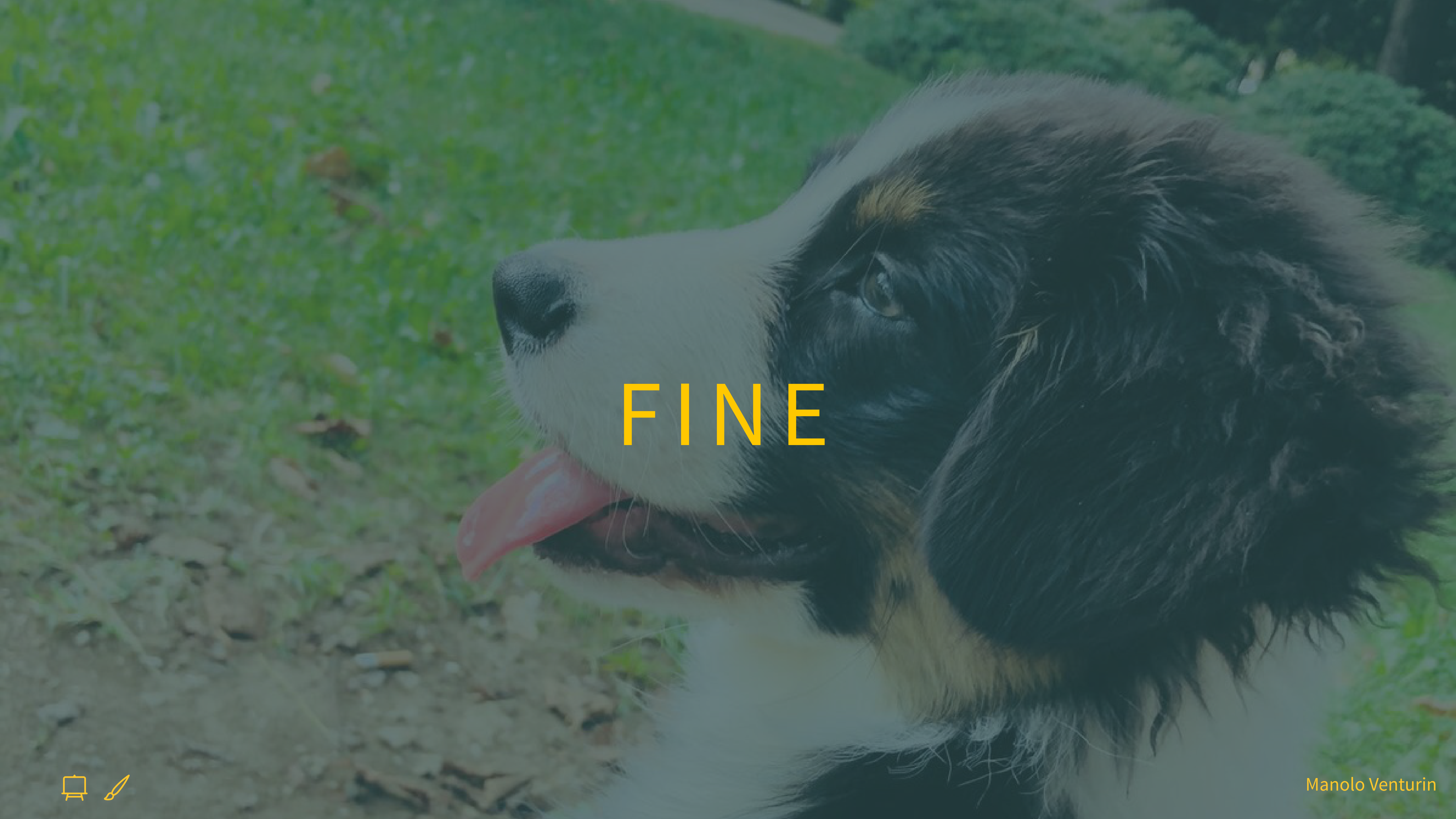
Esempio 2

Le soluzioni $z_{1,2} = 1 \pm 2i$ sono **complesse coniugate** della forma: $z = a \pm bi$ dove:

- la parte reale è $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = a = 1$
- la parte immaginaria è $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) = b = 2$

Per la verifica della fattorizzazione si ha

$$
\begin{aligned}
z^2 - 2z + 5 &= 1 \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \\
&= [z - (1 + 2i)] \cdot [z - (1 - 2i)] \\
&= (\text{verifica}) \\
&= z^2 + \left[-(1 - \cancel{2i}) - (1 + \cancel{2i})\right] z + [(1 + 2i) \cdot (1 - 2i)] \\
&= z^2 - 2z + \left(1 - \cancel{2i} + \cancel{2i} - 4i^2\right) \\
&= z^2 - 2z + \left(1 - 4 \cdot (-1)\right) \ = \ z^2 - 2z + 5
\end{aligned}
$$



FINE