I numeri complessi: introduzione

(Motivazioni)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Soluzione di un’equazione di II grado
- Soluzione di un’equazione di III grado
- Elevamento a potenza

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Soluzione di un'equazione di II grado

L'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

ha tre tipologie di soluzioni:

- se $\Delta > 0$: ha **due soluzioni reali distinte** della forma $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- se $\Delta = 0$: ha **due soluzioni reali coincidenti** (soluzione doppia) della forma $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$
- se $\Delta < 0$: non ha **nessuna soluzione reale** (equazione impossibile)

Come trattare il caso $\Delta < 0$?

Soluzione di un'equazione di II grado

Ad esempio, l'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1$$

non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

Ma, introducendo il simbolo i detto **unità immaginaria** t.c.

$$i^2 = -1$$

possiamo dare un senso a $\sqrt{-1} = \pm i$ e quindi scrivere la soluzione dell'equazione come

$$x^2 = -1 \iff x = \pm\sqrt{-1} \iff x = \pm i$$

Inoltre, vale la fattorizzazione

$$(x - i) \cdot (x + i) = x^2 - i^2 = x^2 + 1$$

Equazione di III grado

Un esempio di necessità di lavorare con i numeri complessi, viene dall'usare la **formula di Cardano** per il calcolo della radice dell'equazione di terzo grado

Ad esempio, l'equazione

$$x^3 = 15x + 4$$

ha le radici

- $x = 4$ (i.e. $4^3 = 15 \cdot 4 + 4$)
- $x = -2 \pm \sqrt{3}$

Applicando la formula risolutiva di Cardano si ottiene

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

Come calcolare/trattare questo tipo di operazioni?

Equazione di III grado

Per risolvere/semplificare l'espressione precedente

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

osserviamo che

- $2 + 11\sqrt{-1} \;=\; 2 + 11i \;=\; (2+i)^3$
- $2 - 11\sqrt{-1} \;=\; 2 - 11i \;=\; (2-i)^3$

Infatti, da $i^2 = -1$ si ha

- $(2+i)^3 \;=\; 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 \;=\; 8 + 12i - 6 + (i^2)i \;=\; 2 + 11i$
- $(2-i)^3 \;=\; 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - i^3 \;=\; 8 - 12i - 6 - (i^2)i \;=\; 2 - 11i$

Equazione di III grado

- $2 + 11\sqrt{-1} \;=\; 2 + 11i \;=\; (2+i)^3$
- $2 - 11\sqrt{-1} \;=\; 2 - 11i \;=\; (2-i)^3$

Quindi, la soluzione diventa

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \\ &= \sqrt[\cancel{3}]{(2+i)^{\cancel{3}}} + \sqrt[\cancel{3}]{(2-i)^{\cancel{3}}} \\ &= (2 + \cancel{i}\,) + (2 - \cancel{i}\,) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Elevamento a potenza

Una ragione di natura algebrica è l'elevamento a potenza a^b della forma $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ con $b = \frac{m}{n}$

Dalla scrittura $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ l'elevamento a potenza a^b è ben definito per

- a positivo e b qualunque (anche un numero reale)
- a negativo soltanto se $b = \frac{m}{n}$ con n intero dispari

$$\sqrt[-n]{a} = a^{\frac{1}{-n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

- **Come estendere questi concetti in modo opportuno?**
- **Come si definisce la radice di un numero complesso?**

Elevamento a potenza

Ad esempio, osserviamo che

- $1^4 = 1$
- $(-1)^4 = 1$
- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
- $(-i)^4 = ((-i)^2)^2 = 1^2 = 1$

Quindi, le radici quarte di 1, nel campo complesso, sono quattro: $\sqrt[4]{1} = \{\pm 1,\ \pm i\}$

Quindi, il problema di trovare $\sqrt[4]{1}$ è legato al problema di risolvere l'equazione $z^4 = 1$, da cui

$$z^4 - 1 = 0 \iff (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \iff (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0$$

Struttura dei video: 3 parti

Parte I

- Forma algebrica e relative operazioni
- Coniugato e modulo e relative proprietà
- Definizione assiomatica
- Rappresentazione grafica e ordinamento

Parte II

- Rappresentazione trigonometrica
- Potenza — teorema di De Moivre
- Le radici n-esime
- Esponenziale complesso
- Rappresentazione esponenziale

Struttura dei video: 3 parti

Parte III

- Luoghi geometrici notevoli
- Equazioni algebriche
- Disequazioni algebriche

Prerequisiti

- Funzioni trigonometriche (rappr. trig. e radici n-esime)
- Funzione esponenziale (rappr. esponenziale)
- Eq. cerchio / retta (risoluzione di eq. e diseq.)

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

FINE