

Il principio di induzione (funzioni trascendenti)

Complementi — parte 1

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~

# Indice (corso Analisi Matematica 1)

Usando il principio di induzione dimostrare che

1.  $\log(1+n) < n$  per  $n \geq 1$

2.  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$  per  $n \geq 1$

3.  $\cos x \cdot \cos(2x) \cdot \cdots \cdot \cos(2^{n-1}x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}$  se  $\sin x \neq 0$  e  $n \geq 1$

4.  $\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$  se  $x \neq 0$  e  $n \geq 1$

5.  $|\sin(nx)| \leq n |\sin x|$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{R}$

6.  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n^2}$  per  $n \geq 1$

7.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{(2n-1)}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$  e  $n \geq 1$

Gli esercizi sono molto difficili (in ordine di difficoltà); gli esercizi 3 e 4 sono molto laboriosi



# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Esercizi

# Esercizio 1

Usando il principio di induzione dimostrare che

$$\log(1 + n) < n$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$

## Suggerimento

$$\log(a + b) = \log\left(a \left(1 + \frac{b}{a}\right)\right) = \log a + \log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

# Esercizio 1

$$\log(1 + n) < n$$

## Soluzione (passo base)

Per  $n = 1$  dobbiamo dimostrare che

$$\log(1 + 1) < 1 \iff \log 2 < 1$$

Ricordando che l'esponenziale è una funzione crescente si ha

$$\log 2 < 1 \iff 2 < e^1 = 2.718 \dots$$

che risulta vera

# Esercizio 1

$$\log(1+n) < n \quad , \quad \log 2 < 1$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\log(1+n+1) = \log\left((n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) = \log(n+1) + \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

(passo induttivo)

$$< n + \log\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{<1}\right)$$

$$\leq n + \log 2$$

(dal passo base)

$$\leq n + \underbrace{\log 2}_{<1} \leq n + 1$$



# Esercizio 2

Usando il principio di induzione dimostrare che

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right)$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  (somma eseguita  $n$  volte sotto radice).

## Suggerimento

Utilizzare:

- $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

# Esercizio 2

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right)$$

## Soluzione (passo base)

Per  $n = 1$  si ha

$$\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

# Esercizio 2

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right)$$

## Soluzione (passo induttivo)

Indicato con  $a_n$  l'espressione fino ad  $n$  si ha

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n} \\ &\text{(ipotesi induttiva)} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right)} \\ &\text{(identità trigonometrica)} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \left( 2 \frac{\pi}{2^{n+2}} \right)} = \sqrt{2 + 2 \left( 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2^{n+2}} \right) - 1 \right)} \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2^{n+2}} \right)} = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2^{n+2}} \right) \end{aligned}$$



# Esercizio 3

Usando il principio di induzione dimostrare che, se  $\sin x \neq 0$  allora

$$\cos x \cdot \cos (2x) \cdot \dots \cdot \cos (2^{n-1}x) = \frac{\sin (2^n x)}{2^n \sin x}$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .

## Suggerimento

Utilizzare:

- $\sin (2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

# Esercizio 3

$$\prod_{k=1}^n \cos(2^{k-1}x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}$$

## Soluzione (passo base)

Per  $n = 1$  si ha

- $\prod_{k=1}^1 \cos(2^{k-1}x) = \cos(2^{1-1}x) = \cos x$
- $\frac{\sin(2^1 x)}{2^1 \sin x} = \frac{\sin(2x)}{2 \sin x}$

le due espressioni sono uguali in quanto

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin(2x)$$

# Esercizio 3

$$\prod_{k=1}^n \cos(2^{k-1}x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos(2^{k-1}x) = \left[ \prod_{k=1}^n \cos(2^{k-1}x) \right] \cdot \cos(2^n x)$$

(ipotesi induttiva)

$$= \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x} \cdot \cos(2^n x)$$

(duplicazione angolo)

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin(2 \cdot 2^n x)}{2^n \sin x}$$

$$= \frac{\sin(2^{n+1} x)}{2^{n+1} \sin x}$$



# Esercizio 4

Usando il principio di induzione dimostrare che, se  $x \neq 0$  allora

$$\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .

## Suggerimento

Utilizzare:

- $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$  (formula di Werner)
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$  (prostaferesi)

# Esercizio 4

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

## Soluzione (passo base)

Per  $n = 1$  si ha

- $\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \sin x$
- $\frac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{(1+1)}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}} = \sin x$

e le due espressioni sono uguali

# Esercizio 4

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin(kx) = \sum_{k=1}^n \sin(kx) + \sin((n+1)x)$$

(ipotesi induttiva)

$$= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}} + \sin((n+1)x)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right) + \sin((n+1)x) \cdot \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$



# Esercizio 4

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right) + \sin((n+1)x) \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

(usando Werner)

$$= \frac{\cos\left(\frac{n}{2}x - \frac{(n+1)}{2}x\right) - \cos\left(\frac{n}{2}x + \frac{(n+1)}{2}x\right) + \cos\left((n+1)x - \frac{x}{2}\right) - \cos\left((n+1)x + \frac{x}{2}\right)}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right) + \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right) - \cos\left(nx + \frac{3}{2}x\right)}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(nx + \frac{3}{2}x\right)}{2 \sin\frac{x}{2}}$$



# Esercizio 4

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \sin(kx) &= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(nx + \frac{3}{2}x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &\text{(usando prostaferesi)} \\ &= -2 \frac{\sin\left(\frac{\frac{1}{2}x + nx + \frac{3}{2}x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\frac{1}{2}x - nx - \frac{3}{2}x}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= - \frac{\sin \frac{nx+2x}{2} \sin \frac{-nx-x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+2)x}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\end{aligned}$$



# Esercizio 5

Usando il principio di induzione dimostrare che

$$|\sin(nx)| \leq n |\sin x|$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{R}$

## Suggerimento

Utilizzare:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- Disuguaglianza triangolare relativa ai moduli
- $|\cos(\cdot)| \leq 1$

# Esercizio 5

$$|\sin(nx)| \leq n |\sin x|$$

## Soluzione (passo base)

Per  $n = 0$  si ha

- $|\sin(0 \cdot x)| = |\sin 0| = 0$
- $0 \cdot |\sin x| = 0$

quindi vale  $=$  e la disequazione è verificata

# Esercizio 5

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx + x)| \\ &\text{(formula di addizione)} \\ &= |\sin(nx) \cdot \cos x + \cos(nx) \cdot \sin x| \\ &\text{(disug. triangolare)} \\ &\leq |\sin(nx) \cdot \cos x| + |\cos(nx) \cdot \sin x| \\ &= |\sin(nx)| \cdot |\cos x| + |\cos(nx)| \cdot |\sin x| \\ &\text{(maggiorazione del coseno)} \\ &\leq |\sin(nx)| \cdot 1 + 1 \cdot |\sin x| \\ &\text{(ipotesi induttiva)} \\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x| \end{aligned}$$

# Esercizio 6

Usando il principio di induzione dimostrare che

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n^2}$$

per ogni per ogni  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

## Suggerimento

Partendo da  $(n - 1)^2 \geq 0$  e  $n \geq 2$  dimostrare che

$$n \geq \sqrt{n+1}$$

ed utilizzare questa formula nella parte induttiva

# Esercizio 6

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{n^2}$$

## Soluzione (passo base)

Per  $n = 2$  si ha

- $\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $\frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$

Dobbiamo verificare che (semplificando e poi elevando al quadrato e semplificando)

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \implies -\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{2} \implies \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$



che quindi è verificata

# Esercizio 6

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{n^2}$$

Disuguaglianza utile

Da

$$(n-1)^2 \geq 0 \iff n^2 - 2n + 1 \geq 0$$

e  $n \geq 2$  si ha

$$n^2 \geq 2n - 1 \geq n + \underbrace{n}_{\geq 2} - 1 \geq n + 2 - 1 \geq n + 1$$

Essendo la radice quadrata una funzione crescente si ha

$$n^2 \geq n + 1 \implies n \geq \sqrt{n+1}$$



# Esercizio 6

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{n^2}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \left[ \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right] \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

(ipotesi induttiva)

$$< \frac{2}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{2}{n^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

(razionalizzando e semplificando)

$$= \frac{2}{n^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n+1}}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{n+1} + 1} = \frac{2}{n^2} \cdot \left(\frac{n+1-1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} \cdot (\sqrt{n+1} + 1)} = \frac{2}{n(n+1) + n\sqrt{n+1}}$$

# Esercizio 6

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{n^2}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) &< \frac{2}{n(n+1) + n\sqrt{n+1}} \\ &\quad (n \geq \sqrt{n+1} > 1) \\ &< \frac{2}{n(n+1) + \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{2}{n(n+1) + (n+1)} \\ &= \frac{2}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

# Esercizio 7

Usando il principio di induzione dimostrare che

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

per ogni per ogni  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .

## Suggerimento

Linee guida:

- usare ipotesi induttiva
- sistemare il numeratore facendo comparire 1
- unica radice al denominatore
- sviluppare il termine sotto-radice e dare una maggiorazione



# Esercizio 7

$$\prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

## Soluzione (passo base)

Per  $n = 1$  dobbiamo dimostrare che

$$\prod_{k=1}^1 \frac{(2k-1)}{2k} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

che è verificata

# Esercizio 7

$$\prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-1)}{2k} = \left[ \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)}{2k} \right] \cdot \frac{(2n+1)}{2n+2}$$

(ipotesi induttiva)

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{(2n+1)}{2n+2}$$

(sistemiamo il numeratore facendo comparire 1)

$$= \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+1) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)}$$

(unica radice)

$$= \frac{1}{\sqrt{(3n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^2}}$$



# Esercizio 7

Vediamo una stima del termine sotto radice

$$\begin{aligned}(3n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^2 &= (3n+1) + 2\frac{3n+1}{2n+1} + \frac{3n+1}{(2n+1)^2} \\&= (3n+1) + 2\frac{(2n+1)+n}{2n+1} + \frac{(2n+1)+n}{(2n+1)^2} \\&= (3n+1) + 2 + 2\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)} + \frac{n}{(2n+1)^2} \\&= (3n+1) + 2 + \frac{2n+1}{2n+1} + \frac{n}{(2n+1)^2} \\&= (3n+1) + 2 + 1 + \underbrace{\frac{n}{(2n+1)^2}}_{>0} \\&\geq (3n+1) + 3 \\&\geq 3(n+1) + 1\end{aligned}$$



# Esercizio 7

$$\prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad , \quad (3n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^2 \geq 3(n+1) + 1 > 1$$

Si ha

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{(2k-1)}{2k} &\leq \frac{1}{\sqrt{(3n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^2}} \\ &\quad \text{(usando la stima precedente)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1) + 1}} \end{aligned}$$



FINE