Dimostrazione Regola di Ruffini

Manolo Venturin

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Dimostrazione della regola di Ruffini
- La dimostrazione segue l’equivalenza con la divisione “lunga” dei polinomi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Regola di Ruffini

La regola di Ruffini stabilisce un metodo per dividere un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

per il binomio

$$D(x) = x - r$$

ottenendo un polinomio quoziente $Q(x)$ ed un polinomio resto R (costante) con la proprietà

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x) \cdot D(x) + R \\ &= Q(x) \cdot (x - r) + R \end{aligned}$$

Se il resto è zero, si dice che $D(x) = x - r$ divide $P(x)$ e che r è una radice del polinomio e la fattorizzazione diventa $P(x) = Q(x) \cdot D(x)$

Esempio: regola di Ruffini

Dividiamo il polinomio

$$P(x) = 5x^3 - 3x^2 - 16x + 3$$

per

$$D(x) = x - 2$$

dove

- $r = 2$
- i coefficienti sono: $5, \quad -3, \quad -16, \quad +3$

Esempio: regola di Ruffini

> $$P(x) = 5x^3 - 3x^2 - 16x + 3 \qquad \text{e} \qquad D(x) = x - 2 \qquad (r = 2)$$

Procedimento

1. Scrivere coefficienti del polinomio $P(x)$ e la radice da testare $r = 2$

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 5 & -3 & -16 & 3 \\
2 & & & & \\
\hline
 & & & & \\
\end{array}$$

Esempio: regola di Ruffini

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 5 & -3 & -16 & 3 \\
2 & & & & \\
\hline
 & & & &
\end{array}
$$

2. Copiamo il primo coefficiente sotto

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 5 & -3 & -16 & 3 \\
2 & & & & \\
\hline
 & 5 & & &
\end{array}
$$

Esempio: regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 5 & -3 & -16 & 3 \\
2 & & & & \\
\hline
 & 5 & & &
\end{array}$$

3. Moltiplichiamo il numero più a destra della riga sotto per il coefficiente r e scriviamo il risultato nella seconda riga

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 5 & -3 & -16 & 3 \\
2 & & 10 & & \\
\hline
 & 5 & & &
\end{array}$$

Esempio: regola di Ruffini

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 5 & -3 & -16 & 3 \\
2 & & 10 & & \\
\hline
 & 5 & & &
\end{array}
$$

4. Sommiamo i valori della colonna così trovata e li scriviamo nella riga sotto

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 5 & -3 & -16 & 3 \\
2 & & 10 & & \\
\hline
 & 5 & 7 & &
\end{array}
$$

Esempio: regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & & \\ \hline & 5 & 7 & & \end{array}$$

5. Ripetiamo i passi 3 e 4 fino alla fine

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & \\ \hline & 5 & 7 & & \end{array}$$

Esempio: regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & \\ \hline & 5 & 7 & & \end{array}$$

6. Ripetiamo i passi 3 e 4 fino alla fine

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & \\ \hline & 5 & 7 & -2 & \end{array}$$

Esempio: regola di Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & \\ \hline & 5 & 7 & -2 & \end{array}$$

6. Ripetiamo i passi 3 e 4 fino alla fine

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & -4 \\ \hline & 5 & 7 & -2 & \end{array}$$

Esempio: regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & -4 \\ \hline & 5 & 7 & -2 & \end{array}$$

6. Ripetiamo i passi 3 e 4 fino alla fine

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & -4 \\ \hline & 5 & 7 & -2 & -1 \end{array}$$

Esempio: regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & -4 \\ \hline & 5 & 7 & -2 & -1 \end{array}$$

Quindi si ha la fattorizzazione

$$5x^3 - 3x^2 - 16x + 3 \;=\; (5x^2 + 7x - 2) \cdot (x - 2) + (-1)$$

Regola di Ruffini: Elementi essenziali

1. Scrittura dei coefficienti del polinomio senza la x
2. Scrittura della radice r
3. Ricopio il primo coeffciente
4. Ripeto il passo generale (colonna generica)

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & \dots & \dots & \square & \dots & \dots \\
r & \dots & \dots & r \cdot \Delta & & \\
\hline
 & \dots & \Delta & \circ & &
\end{array}
\qquad \text{con} \qquad \circ = \square + r \cdot \Delta
$$

dove

- $\square$ è il coefficiente di P alla colonna corrente
- r è la radice del binomio $x - r$
- Δ è il calcolo della tabella di Ruffini nella colonna precedente

Dimostrazione (non troppo formale)

> La regola di Ruffini è equivalente alla divisioni tra polinomi tra $P(x)$ e $D(x)$ se $D(x)$ è della forma $x - r$

Elementi essenziali della dimostrazione:

- il coeff. della x in $D(x) = x - r$ è 1
- il grado di $D(x)$ è 1

Esempio divisione tra polinomi

La dimostrazione la vediamo applicata ad un esempio e la confrontiamo con la regola di Ruffini

Procediamo con lo stesso esempio i.e.

$$P(x) = 5x^3 - 3x^2 - 16x + 3$$

e

$$D(x) = x - 2$$

Prima colonna

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & -4 \\ \hline & 5 & 7 & -2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cc} 5x^3 & -3x^2 & -16x & +3 & x & -2 \\ \hline & & & & 5x^2 & \end{array}$$

Il primo passo della divisione corrisponde alla ricopiatura del coefficiente della regola di Ruffini

Ricopio il coefficiente perché il coefficiente di x in $x-2$ è 1

Seconda colonna

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & -4 \\ \hline & 5 & 7 & -2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cc} 5x^3 & -3x^2 & -16x & +3 & x & -2 \\ \hline -5x^3 & +10x^2 & & & 5x^2 & \\ \hline \end{array}$$

Ora

- $r = 2, \Delta = 5, r \cdot \Delta = 2 \cdot 5 = 10$

Qui è importante notare che essendo il grado di r pari a 0 questo si ripercuote solo sulla colonna successiva a quella corrente

Seconda colonna

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 5 & -3 & -16 & 3 \\
2 & & 10 & 14 & -4 \\
\hline
 & 5 & 7 & -2 & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|cc}
5x^3 & -3x^2 & -16x & +3 & x & -2 \\
\hline
-5x^3 & +10x^2 & & & 5x^2 & \\
\hline
 & +7x^2 & & & &
\end{array}
$$

Ora

- $\square = -3$
- $r \cdot \Delta = 10$
- $\circ = \square + r \cdot \Delta = 7$

Terza colonna

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -3 & -16 & 3 \\ 2 & & 10 & 14 & -4 \\ \hline & 5 & 7 & -2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cc} 5x^3 & -3x^2 & -16x & +3 & x & -2 \\ \hline -5x^3 & +10x^2 & & & 5x^2 & +7x \\ \hline & +7x^2 & & & & \end{array}$$

Ora

- $\Delta = 7$

Questo è possibile perché il coefficiente di x in $x - 2$ è 1

E così via!

e adesso si ripete la procedura nuovamente individuando e calcolando

- $r = 2$
- Δ
- $r \cdot \Delta$
- $\square$
- $\circ = \square + r \cdot \Delta$

Quindi abbiamo dimostrato con un esempio l'equivalmenza di Ruffini con la divisione tra polinomi.

La dimostrazione si formalizzerebbe andando a specificare i coefficienti a_n del polinomio e così via (diventerebbe per ora solo complicata)!


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)