Esponenziale

(e relative proprietà)

Ripasso di matematica

Manolo Venturin

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sull'esponenziale
- Proprietà dell'esponenziale a seconda della base $0 < a < 1$ o $a > 1$
- Equazioni e disequazioni con l'esponenziale
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

L'esponenziale

La funzione esponenziale ha la forma

$$y = a^x$$

con $a > 0$, fissato detto base e $x \in \mathbb{R}$

Esempio di grafico

> Disegnare il grafico dell'esponenziale per $a = 2$ e $a = \frac{1}{2}$

Soluzione

Per ottenere il grafico di $y_1 = 2^x$ e $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ costruiamo la tabella di valutazione

x	$y_1 = 2^x$	$y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$2^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$2^1 = 2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$2^2 = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Esempio di grafico

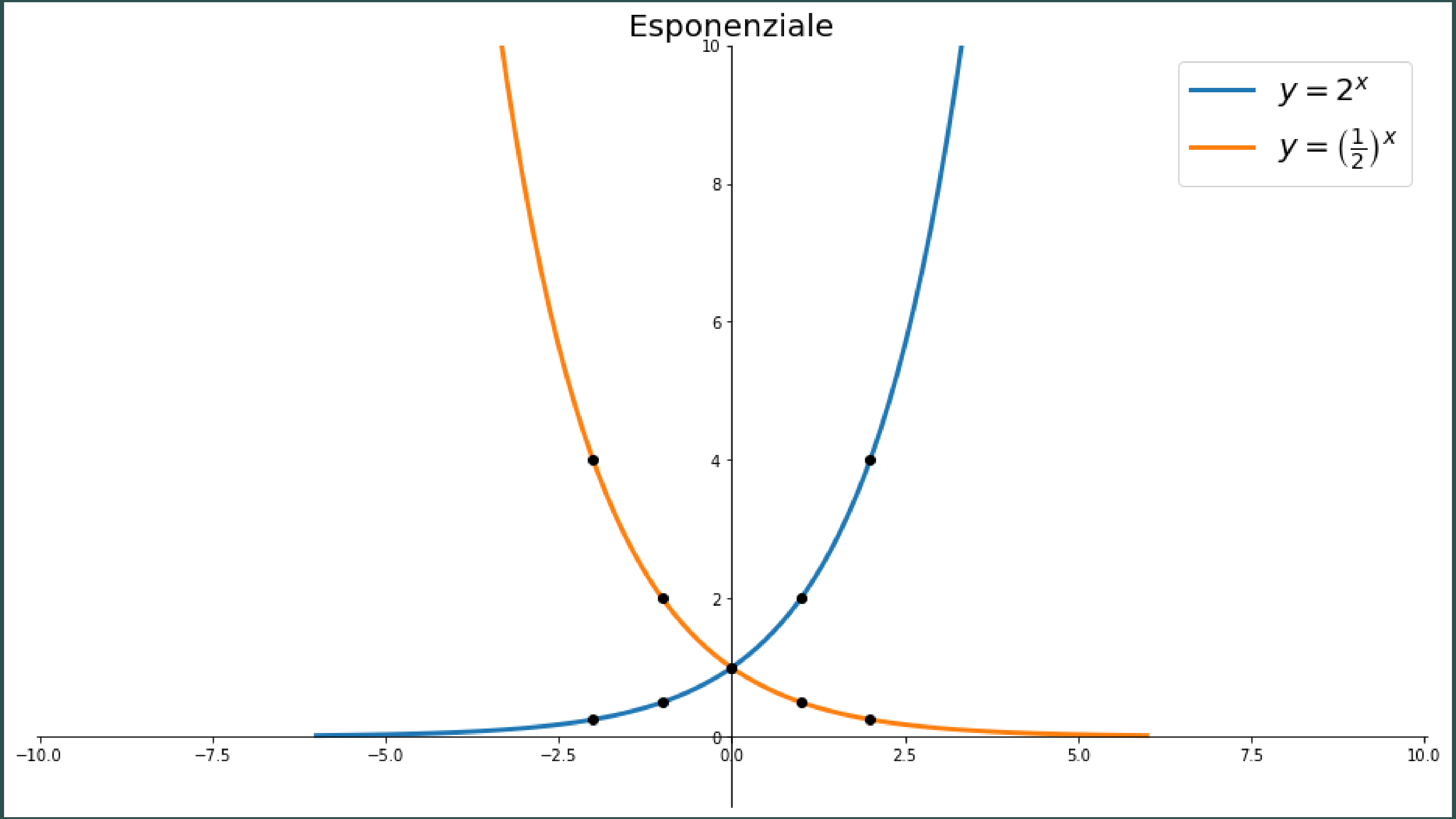
Per x **positivo molto grande**

- 2^x diventa numero *molto grande*
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$ è la divisione di 1 per un numero positivo molto grande e quindi il risultato è un numero positivo *molto piccolo vicino allo zero*

Per x **negativo molto grande**

- $2^x = \frac{1}{2^{-x}}$ diventa un numero *molto piccolo* perché $-x$ diventa positivo molto grande
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ diventa un numero *molto grande* perché $-x$ diventa positivo molto grande

Esempio di grafico



L'esponenziale: proprietà

Ci sono **tre casi** notevoli di a^x da discutere:

- per $a > 1$ la funzione è crescente, i.e. $x > y \implies a^x > a^y$
- per $0 < a < 1$ la funzione è decrescente, i.e. $x > y \implies a^x < a^y$ **!!!**
- per $a = 1$ la funzione è costante, i.e. $y = 1$

Inoltre, l'esponenziale ha

- il **dominio**, ovvero tutti i valori che può assumere la x: $\mathbb{R}$
- il **codominio**, ovvero tutti i valori assunti dalla y: $\mathbb{R}^+$
  (tutti i numeri reali positivi con esclusione dello zero)

L'esponenziale: proprietà

Le funzioni esponenziali hanno le stesse proprietà delle potenze, ovvero

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^y$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

Esempi

Esempio 1

> Risolvere l'equazione
>
> $$3^{x+1} - \frac{1}{3^x} = 2$$

Soluzione

Ponendo $t = 3^x$ si ha

$$3t - \frac{1}{t} = 2 \implies \frac{3t^2 - 2t - 1}{t} = 0$$

Essendo $t \neq 0$, anzi $t \geqslant 0$ si ha

$$3t^2 - 2t - 1 = 0 \implies t_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{+2 \pm 4}{6} = \left\{1, \ -\frac{1}{3}\right\}$$

Esempio 1

$$t = 3^x \quad \text{e} \quad t_{1,2} = \left\{1,\ -\frac{1}{3}\right\}$$

Quindi le soluzione sono

- $t = 1 \implies 3^x = 1 \implies 3^x = 3^0 \implies x = 0$
- $t = -\frac{1}{3} \implies 3^x = -\frac{1}{3} \implies x = \{\emptyset\}$

Esempio 2

Risolvere le disequazioni

$$3^x \geqslant 0, \quad 3^x \geqslant 1, \quad 3^x \geqslant 3, \quad 3^x \geqslant \frac{1}{3}$$

Esempio 2

> Risolvere le disequazioni
>
> $$3^x \geqslant 0, \qquad 3^x \geqslant 1, \qquad 3^x \geqslant 3, \qquad 3^x \geqslant \frac{1}{3}$$

Soluzione

Sappiamo che l'esponenziale è sempre positivo, quindi

$$3^x \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$$

Esempio 2

> Risolvere le disequazioni
>
> $$3^x \geqslant 0, \qquad 3^x \geqslant 1, \qquad 3^x \geqslant 3, \qquad 3^x \geqslant \frac{1}{3}$$

Soluzione

Dalle proprietà delle potenze si ha

$$1 = 3^0$$

e quindi (funz. crescente)

$$3^x \geqslant 3^0 \implies \{x \geqslant 0\}$$

Esempio 2

> Risolvere le disequazioni
>
> $$3^x \geqslant 0, \quad 3^x \geqslant 1, \quad 3^x \geqslant 3, \quad 3^x \geqslant \frac{1}{3}$$

Soluzione

Dalle proprietà delle potenze si ha

$$3 = 3^1$$

e quindi (funz. crescente)

$$3^x \geqslant 3^1 \implies \{x \geqslant 1\}$$

Esempio 2

> Risolvere le disequazioni
>
> $$3^x \geqslant 0, \quad 3^x \geqslant 1, \quad 3^x \geqslant 3, \quad 3^x \geqslant \frac{1}{3}$$

Soluzione

Dalle proprietà delle potenze si ha

$$\frac{1}{3} = 3^{-1}$$

e quindi (funz. crescente)

$$3^x \geqslant 3^{-1} \implies \{x \geqslant -1\}$$

Esempio 3

> Risolvere le disequazioni
>
> $$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 0, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 1, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 3, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \frac{1}{3}$$

Nota:

Si potrebbe convertire

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{(-x)}$$

(lascio a voi di provare questa strada simile all'esercizio 2, ma fate attenzione al segno meno)

Esempio 3

> Risolvere le disequazioni
>
> $$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 0, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 1, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 3, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \frac{1}{3}$$

Soluzione

Sappiamo che l'esponenziale è sempre positivo, quindi

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 0 \implies x \in \mathbb{R}$$

Esempio 3

> Risolvere le disequazioni
>
> $$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 0, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 1, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 3, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \frac{1}{3}$$

Soluzione

Dalle proprietà delle potenze si ha

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

e quindi (funz. decrescente)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^0 \quad \Longrightarrow \quad \{x \leqslant 0\}$$

Esempio 3

> Risolvere le disequazioni
>
> $$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 0, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 1, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 3, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \frac{1}{3}$$

Soluzione

Dalle proprietà delle potenze si ha

$$3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

e quindi (funz. decrescente)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \{x \leqslant -1\}$$

Esempio 3

Risolvere le disequazioni

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 0, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 1, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 3, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \frac{1}{3}$$

Soluzione

Dalle proprietà delle potenze si ha

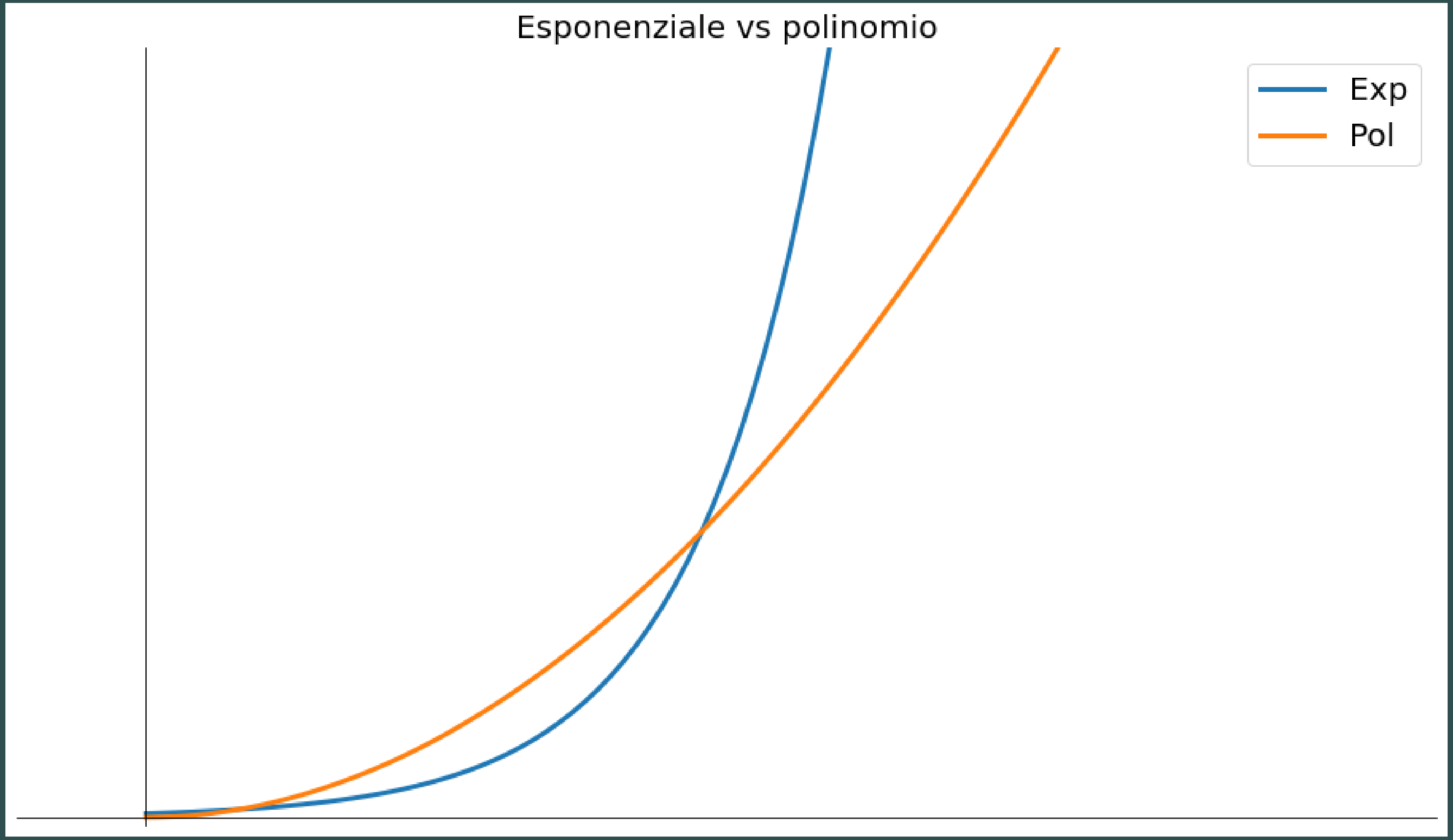
$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

e quindi (funz. decrescente)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^1 \quad \Longrightarrow \quad \{x \leqslant 1\}$$

Curiosità: crescita esponenziale vs crescita polinomiale

Per x grandi vince sempre l'esponenziale




FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)