Sistemi lineari degeneri

(Nessuna soluzione / infinite soluzioni)
Ripasso di matematica

Manolo Venturin

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sui sistemi lineari degeneri dove il numero di equazioni è maggiore del numero delle incognite
- Sistemi lineari con infinite soluzioni
- Sistemi lineari impossibili
- Caso di 2 o 3 equazioni al massimo
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Sistema lineare degenere

Sistema lineare degenere:

- Nessuna soluzione
- Infinite soluzioni

Sistema lineare degenere con nessuna soluzione

Quando succede che un sistema lineare non ha **nessuna soluzione**

- Quando scrivo un'equazione in contraddizione con un'altra

Ad esempio

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare degenere con infinite soluzioni

Quando succede che un sistema lineare ha **infinite soluzioni**?

- Una equazione è combinazione delle altre eventualmente moltiplicata per qualche costante

Ad esempio (la seconda è due volte la prima):

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Ad esempio (la terza è la seconda meno la prima):

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare degenere con infinite soluzioni

Quando succede che un sistema lineare ha infinite soluzioni?

- Una equazione è combinazione delle altre eventualmente moltiplicata per qualche costante

Cosa significa risolverlo?

- Quindi il sistema ha delle variabili che non possono essere fissate
- Si da la soluzione in termini di queste variabili

Esempio 1

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

Soluzione

Si tratta di un sistema lineare di **2 equazioni** in **3 incognite**

Per risolvere questa tipologia di sistemi dobbiamo fissare una variabile (questo argomento si sviluppa in un corso di algebra lineare)

In questo caso scegliamo la z scrivendo

$$z = z$$

Esempio 1

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

Soluzione

A questo punto la z va trattata come fosse un numero e il sistema diventa

$$\begin{cases} x - 2y = (1 - z) \\ 2x - y = (2 + 2z) \end{cases}$$

Isolando la x dalla prima equazione, sostituendola nella seconda, si ha

$$\begin{cases} x = (1 - z) + 2y \\ 2\big((1 - z) + 2y\big) - y = (2 + 2z) \end{cases} \implies \begin{cases} x = (1 - z) + 2y \\ 3y = 4z \end{cases}$$

Esempio 1

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

Soluzione

$$\begin{cases} x = (1 - z) + 2y \\ 3y = 4z \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzione $y = \frac{4}{3}z$ che sostituita nella prima fornisce

$$x = (1 - z) + 2 \cdot \frac{4}{3}z \implies x = 1 + \frac{5}{3}z$$

Esempio 1

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

Soluzione

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{3} z \\ y = \frac{4}{3} z \end{cases}$$

Il sistema ha le seguenti (infinite) soluzioni (x, y, z): $\left(1 + \frac{5}{3} z,\ \frac{4}{3} z,\ z\right)$

Esempio 2

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Soluzione

In questo caso si nota subito che la seconda equazione è il doppio della prima e che se sostituiamo la prima nella seconda otteniamo l'equazione $0 = 0$, per cui il sistema si riduce all'equazione

$$x + y = 1$$

Esempio 2

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Soluzione

Come il caso precedente, va fissata una variabile ad esempio la y da cui

$$x = 1 - y$$

Pertanto le (infinite) soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ y = y \end{cases}$$

Esempio 3

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 5x + 4y - 2z = 1 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

Soluzione

Isoliamo la x dalla terza equazione e la sostituiamo nelle prime due, ottenendo

$$\begin{cases} x = -3 - 2y \\ 2(-3 - 2y) + y - z = 2 \\ 5(-3 - 2y) + 4y - 2z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3 - 2y \\ -3y - z = 8 \\ -6y - 2z = 16 \end{cases}$$

Esempio 3

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 5x + 4y - 2z = 1 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

Soluzione

Isolando z dalla seconda equazione e sostituendola nella terza si ha

$$\begin{cases} x = -3 - 2y \\ -3y - z = 8 \\ -6y - 2z = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2y \\ z = -8 - 3y \\ -6y - 2(-8 - 3y) = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2y \\ z = -8 - 3y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Esempio 3

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 5x + 4y - 2z = 1 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

Soluzione

Fissiamo la variabile y, da cui le (infinite) soluzioni

$$\begin{cases} x = -3 - 2y \\ z = -8 - 3y \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3 - 2y \\ y = y \\ z = -8 - 3y \end{cases}$$

Esempio 4

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = -1 \\ 3x + 5y - 4z = 1 \end{cases}$$

Soluzione

Isolando la x dalla prima equazione e sostituendola nelle rimanenti altri due, si ha

$$\begin{cases} x = 3y + 2z \\ 2(3y + 2z) + y - 3z = -1 \\ 3(3y + 2z) + 5y - 4z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3y + 2z \\ 7y + z = -1 \\ 14y + 2z = 1 \end{cases}$$

Esempio 4

> Risolvere il seguente sistema lineare
>
> $$\begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = -1 \\ 3x + 5y - 4z = 1 \end{cases}$$

Soluzione

Sostituendo la seconda equazione nella terza si ha

$$\begin{cases} x = 3y + 2z \\ 7y + z = -1 \\ 14y + 2z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3y + 2z \\ 7y + z = -1 \\ 2 \cdot (-1) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3y + 2z \\ 7y + z = -1 \\ -2 = 1 \end{cases}$$

La terza equazione è **impossibile**, per cui il sistema non ammette soluzione

Il teorema di Rouché–Capelli

> Caratterizzazione delle soluzioni di un sistema lineare

Prende il nome di due matematici, perché la prima versione del teorema è stata formulata da Eugène Rouché mentre fu Alfredo Capelli a semplificarla


FINE