Sistemi di equazioni

(Introduzione / Sistemi di equazioni notevoli)

Ripasso di matematica

Manolo Venturin

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sui sistemi lineari e non lineari
- Caso notevole a due equazioni e due variabili
- Caso notevole a tre equazioni e tre variabili
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Introduzione

Sistema: insieme di equazioni da risolvere contemporaneamente

Quante soluzioni ci sono per una variabile?

- una soluzione per ogni variabile come in $x = 1$
- più di una soluzione per ogni variabile, come in $x^2 = 1$, $(x = \pm 1)$
- ci siano infinite soluzione, come in $0 \cdot x = 0$
- non ci siano soluzione, come in $0 \cdot x = 1$ o $\frac{1}{x^2} = 0$

Introduzione

Quante soluzioni ci sono per più variabili?

Per i sistemi con equazioni solo di primo grado (lineari):

- Una sola soluzione
- Nessuna soluzione
- Infinite soluzioni

Per i sistemi con un'equazione di grado maggiore di 1 (non-lineari):

- qualunque caso è possibile

Analizzeremo di seguito solo i **casi notevoli**

Lineare di due equazioni (due incognite)

Un sistema lineare di due equazioni in nelle incognite x e y ha la seguente forma

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y = b_2 \end{cases}$$

Si dimostra che se

$$a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2} \neq 0$$

allora la soluzione del sistema è unica, altrimenti potrebbe essere impossibile o indeterminato

Lineare di due equazioni (due incognite)

Un sistema lineare di due equazioni in nelle incognite x e y ha la seguente forma

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y = b_2 \end{cases}$$

Strategia risolutiva:

- La soluzione si ottiene scegliendo un’equazione e isolando una variabile e sostituendola poi nell’altra
- Si risolve l’equazione così ottenuta e si sostituisce il risultato nella prima equazione

Lineare di due equazioni (due incognite)

Ad esempio, dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

isoliamo dalla prima equazione la y (più facile fare rispetto alla x che dovremmo poi dividere per 2) e la sostituiamolo nella seconda, ottenendo

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2(1 - 2x) = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - 4x = -1 - 2 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 1 - 2x \\ -3x = -3 \end{cases}$$

Lineare di due equazioni (due incognite)

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ -3x = -3 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x = 1 \end{cases}$$

L'ultima equazione ha soluzione $x = 1$ che sostituita nella prima, fornisce il risultato

$$\begin{cases} y = 1 - 2 \cdot (1) \\ x = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lineare di tre equazioni (tre incognite)

Il procedimento è simile a quello descritto nel paragrafo precedente

Ad ogni passo, si considera un’equazione e si isola da tale equazione una variabile e se la sostituisce in tutte le altre

Lineare di tre equazioni (tre incognite)

Ad esempio, dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 5 \\ 7x + 4y - 8z = 3 \\ 3x - 3y - 4z = -14 \end{cases}$$

isoliamo $4z$ dalla prima equazione e lo sostituiamo nelle rimanenti, ottenendo

$$\begin{cases} 4z = 5 - 3x + 2y \\ 7x + 4y - 2 \cdot (5 - 3x + 2y) = 3 \\ 3x - 3y - (5 - 3x + 2y) = -14 \end{cases} \implies \begin{cases} 4z = 5 - 3x + 2y \\ 13x = 13 \\ 6x - 5y = -9 \end{cases}$$

Lineare di tre equazioni (tre incognite)

$$\begin{cases} 4z = 5 - 3x + 2y \\ 13x = 13 \\ 6x - 5y = -9 \end{cases}$$

- La seconda equazione ha soluzione $x = 1$
- che sostituita nella terza fornisce $y = \frac{-9-6}{-5} = 3$
- e quindi dalla prima equazione si ha $z = \frac{5-3\cdot1+2\cdot3}{4} = 2$

La soluzione finale è

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Lineare di tre equazioni (tre incognite)

Verifica

Sostituisco la soluzione

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

nelle equazioni

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 5 \\ 7x + 4y - 8z = 3 \\ 3x - 3y - 4z = -14 \end{cases} \implies \begin{cases} 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 5 \\ 7 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 8 \cdot 2 = 3 \\ 3 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -14 \end{cases} \implies \begin{cases} 3 - 6 + 8 = 5 \\ 7 + 12 - 16 = 3 \\ 3 - 9 - 8 = -14 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 5 = 5 \\ 3 = 3 \\ -14 = -14 \end{cases}$$

Non-lineare di due equazioni

> **Caso:** Un'equazione quadratica assieme ad un'equazione lineare

Ad esempio, dato il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 14 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

isoliamo una variabile, ad esempio la x dall'equazione lineare (la seconda equazione), e la sostituiamo nella prima, ottenendo

$$\begin{cases} (3-y)^2 - 2y^2 = 14 \\ x = 3 - y \end{cases} \implies \begin{cases} -y^2 - 6y - 5 = 0 \\ x = 3 - y \end{cases}$$

Non-lineare di due equazioni

La prima equazione $y^2 + 6y + 5 = 0$ ha soluzione

$$y_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \{-1,\ -5\}$$

La x si ottiene dalla seconda equazione, $x = 3 - y$, i.e.

- per $y = -1 \implies x = 3 - (-1) = 4$
- per $y = -5 \implies x = 3 - (-5) = 8$

Quindi, le soluzione del sistema sono le coppie (x, y):

$$(4, -1) \quad \text{e} \quad (8, -5)$$

Esercizio

> Quante soluzioni ha il seguente sistema di equazioni
>
> $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - y = 9 \end{cases}$$

Soluzione

Si tratta di un sistema non lineare (sia la prima equazione che la seconda equazione hanno dei monomi di grado 2)

Isoliamo il termine x^2 dalla seconda equazione e lo sostituiamo nella prima

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - y = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} (9 + y) + y^2 = 9 \\ x^2 = 9 + y \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 + y = 0 \\ x^2 = 9 + y \end{cases}$$

Esercizio

$$\begin{cases} y^2 + y = 0 \\ x^2 = 9 + y \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzione

$$y^2 + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{1,2} = \{0, \quad -1\}$$

Per $y = 0$, la seconda equazione diventa

$$x^2 = 9 + 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 3$$

Per $y = -1$, la seconda equazione diventa

$$x^2 = 9 - 1 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$$

Quindi ci sono 4 soluzioni

Curiosità

Chi è stato il primo a proporre una regola per la risoluzione di un sistema lineare di n equazioni in n incognite?

La soluzione fu data da Gabriel Cramer nel 1750


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)