Prodotti notevoli

(Introduzione / Scomposizioni notevoli)

Ripasso di matematica

Manolo Venturin

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sui prodotti notevoli
- Quadrato di un binomio
- Somma o differenza di due cubi
- Quadrato di un trinomio
- Il triangolo di Tartaglia
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Introduzione

Le scomposizioni notevoli o prodotti notevoli sono delle formule di calcolo che permetto di semplificare o sviluppare velocemente determinati potenze o prodotti di polinomi

Ad esempio

$$(a+b)^2 \;=\; (a+b)(a+b) \;=\; a^2+ab+ab+b^2 \;=\; a^2+2ab+b^2$$

compare talmente spesso che uno ricorda direttamente

$$(a+b)^2 \;=\; a^2+2ab+b^2$$

senza i passaggi intermedi che non sono altro che la dimostrazione della formula

Quadrato di un binomio (somma e differenza)

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= (a \pm b)(a \pm b) \\ &= a^2 \pm ab \pm ab + b^2 \\ &= a^2 \pm 2ab + b^2\end{aligned}$$

Quadrato di un binomio (somma e differenza)

$$(a \pm b)^2 \;=\; a^2 \pm 2ab + b^2$$

Nota: Se c'è un segno meno si può raccogliere e portare fuori che il risultato dello sviluppo non cambia.

Quindi sono uguali:

$$(-a-b)^2 \;=\; \big(-(a+b)\big)^2 \;=\; (-1)^2(a+b)^2 \;=\; (a+b)^2$$

$$(-a+b)^2 \;=\; \big(-(a-b)\big)^2 \;=\; (-1)^2(a-b)^2 \;=\; (a-b)^2$$

Differenza di due quadrati

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b) &= a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} + b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Cubo di un binomio (somma e differenza)

Somma:

$$(a+b)^3 \;=\; a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\
&= (a+b)^2(a+b) \\
&= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
&= (a^3+2a^2b+ab^2)+(a^2b+2ab^b+b^3) \\
&= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)
\end{aligned}$$

Cubo di un binomio (somma e differenza)

Somma:

$$(a+b)^3 \;=\; a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Differenza (notate i segni alterni):

$$(a-b)^3 \;=\; a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- $(a-b)^3 \;=\; \big(a+(-b)\big)^3$
- Per i più esperti i coefficienti sono legati al triangolo di **Tartaglia**

Somma o differenza di due cubi

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) &= (a^3 \mp \cancel{a^2 b} + \cancel{ab^2}) + (\pm \cancel{a^2 b} - \cancel{ab^2} \pm b^3) \\ &= a^3 \pm b^3\end{aligned}$$

Quadrato di un trinomio

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\ &= (a^2+ab+ac)+(ab+b^2+bc)+(ac+bc+c^2)\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\end{aligned}$$

Quadrato di un trinomio

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Ad esempio

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^2 &= 1+x^2+x^4+2x+2x^2+2x^3\\ &= x^4+2x^3+3x^2+2x+1\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}(1-x+x^2)^2 &= \left(1+(-x)+x^2\right)^2\\ &= 1+x^2+x^4-2x+2x^2-2x^3\\ &= x^4-2x^3+3x^2-2x+1\end{aligned}$$

Esempi

Esempio 1

> Fattorizzare il seguente polinomio
>
> $$1 - x^4$$

Soluzione

Da $1 - x^4 = (1)^2 - (x^2)^2$ e applicando la differenza tra due quadrati si ha

$$\begin{aligned} 1 - x^4 &= (1)^2 - (x^2)^2 \\ &= (1 - x^2)(1 + x^2) \end{aligned}$$

Anche $1 - x^2$ è la differenza di due quadrati, quindi si ha

$$\begin{aligned} 1 - x^4 &= (1 - x^2)(1 + x^2) \\ &= (1 - x)(1 + x)(1 + x^2) \end{aligned}$$

Esempio 1

> Fattorizzare il seguente polinomio
>
> $$1 - x^4$$

Soluzione

Soluzione:

$$1 - x^4 \; = \; (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)$$

Il fattore $x^2 + 1$ è irriducibile e quindi non ammette fattorizzazione in quanto l'equazione di secondo grado ha $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$

Esempio 2

> Fattorizzare il seguente polinomio
>
> $$x^3 - 8$$

Soluzione

Da $x^3 - 8 = x^3 - 2^3$ e applicando la differenza tra due cubi si ha

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= x^3 - 2^3 \\ &= (x-2)(x^2 + 2x + 2^2) \\ &= (x-2)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

Il fattore $x^2 + 2x + 4$ è irriducibile e quindi non ammette fattorizzazione in quanto l'equazione di secondo grado ha $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12 < 0$

Esempio 3

> Fattorizzare
>
> $$(a+1)^3+(a-1)^3$$

Soluzione

Usando la formula della somma di due cubi si ha

$$\begin{aligned}(a+1)^3+(a-1)^3 &= \big((a+1)+(a-1)\big)\big((a+1)^2-(a+1)(a-1)+(a-1)^2\big)\\ &= 2a\big((a+1)^2-(a^2-1)+(a-1)^2\big)\\ &= 2a\big(\cancel{a^2}+\cancel{2a}+1-\cancel{a^2}+1+a^2-\cancel{2a}+1\big)\\ &= 2a\cdot(a^2+3)\end{aligned}$$

Esempio 3

> Fattorizzare
>
> $$(a+1)^3 + (a-1)^3$$

Il calcolo diretto fornirebbe

- $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$
- $(a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$

da cui

$$(a+1)^3 + (a-1)^3 \;=\; 2a^3 + 6a \;=\; 2a \cdot (a^2+3)$$

Il fattore a^2+3 è irriducibile e quindi non ammette fattorizzazione in quanto l'equazione di secondo grado ha $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$

$(a+b)^n$: Il triangolo di Tartaglia

1 (n=0)
1 1 (n=1)
1 2 1 (n=2)
1 3 3 1 (n=3)
1 4 6 4 1 (n=4)
1 5 10 10 5 1 (n=5)
1 6 15 20 15 6 1 (n=6)
1 7 21 35 35 21 7 1 (n=7)
… …

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a + 1b\\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2\\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\\
&\vdots
\end{aligned}
$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)