I polinomi

(Fattorizzazione)

Ripasso di matematica

Manolo Venturin

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sulla fattorizzazione dei polinomi
- Radici di un polinomio
- Polinomio di grado 1
- Polinomio di grado 2
- Polinomio di grado superiore al secondo
- Regola di Ruffini
- Equazioni riconducibili a quadratiche
- Esempi

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Radici di un polinomio e fattorizzazione

$$P(x_0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = x_0 \text{ è detta radice}$$

e fattorizza $P(x)$ nella forma

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0)$$

con resto 0

- Analizziamo i diversi casi

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Polinomio di grado 1
e sua fattorizzazione

La radice di

$$P(x) = ax + b$$

è

$$ax + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{x} = -\frac{b}{a}$$

e la sua fattorizzazione è

$$a \cdot (x - \bar{x})$$

Ad esempio, $P(x) = 3x + 2$ ha la radice $\bar{x} = -\frac{2}{3}$ e si fattorizza nella forma $P(x) = 3x + 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Polinomio di grado 2 e sua fattorizzazione

Un polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ con $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ può essere fattorizzato nella forma

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

dove

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se $\Delta = 0$ allora $x_1 = x_2$ e la fattorizzazione diventa

$$a \cdot (x - x_1)^2$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Polinomio di grado 2
e sua fattorizzazione

Se $\Delta < 0$ il polinomio è irriducibile e lo si può scrivere come somma di due quadrati

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 1

Fattorizzare

$$-2x^2 - x + 1$$

Soluzione

Si ha $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 1 + 8 = 9$ da cui

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{-4} = \left\{-1, \ \frac{1}{2}\right\}$$

Quindi, la fattorizzazione di $-2x^2 - x + 1$ è

$$-2(x - x_1)(x - x_2) \ = \ -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) \ = \ (1 - 2x)(x + 1)$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

> Fattorizzare
>
> $$-x^2 - 2x - 3$$

Soluzione

Essendo $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 4 - 12 < 0$ l'equazione di secondo grado è irriducibile

E' possibile scrivere come somma di due quadrati (negativi), i.e.

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x - 3 &= -\left(x^2 + 2x + 3\right) \\ &= -\left((x+1)^2 + 3 + 1\right) \\ &= -\left((x+1)^2 + 4\right) \end{aligned}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

> Trovare per quali valori di k la somma delle due radici dell'equazione di secondo grado
>
> $$x^2 + 2kx + k$$
>
> è maggiore o uguale a 4

Soluzione

La somma delle due radici $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ di un'equazione di secondo grado è

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} + \frac{-b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

con la condizione di esistenza $\Delta \geqslant 0$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

> Trovare per quali valori di k la somma delle due radici dell'equazione di secondo grado
>
> $$x^2 + 2kx + k$$
>
> è maggiore o uguale a 4

Soluzione

Perciò si ha

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2k}{1} = 4 \quad \Longrightarrow \quad k = -2$$

Per $k = -2$, si ha $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) > 0$ e quindi le radici (reali) esistono

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Polinomio di grado maggiore al 2 e sua fattorizzazione

Una conseguenza del **teorema fondamentale dell'algebra** asserisce che un polinomio di grado n si fattorizza come prodotti di polinomi di grado 1 o di grado 2 irriducibili

Tipicamente, per calcolare la fattorizzazione di un polinomio si utilizza la **regola di Ruffini** con diversi tentativi iniziali

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Regola di Ruffini

La regola di Ruffini stabilisce un metodo per dividere un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

per il binomio

$$D(x) = x - r$$

ottenendo un polinomio quoziente $Q(x)$ ed un polinomio resto $R(x)$ (costante) con la proprietà

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

Se il resto è zero, si dice che $D(x)$ divide $P(x)$ e che r è una radice del polinomio e la fattorizzazione diventa $P(x) = Q(x) \cdot D(x)$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio: regola di Ruffini

Il polinomio

$$P(x) = 2x^3 + x + 3$$

ha una radice per $r = -1$, infatti

$$P(r = -1) = 2 \cdot (-1)^3 - 1 + 3 = 0$$

quindi possiamo dividere $P(x)$ per

$$x - r = x - (-1) = x + 1$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio: regola di Ruffini

> $$P(x) = 2x^3 + x + 3 \qquad \text{e} \qquad D(x) = x + 1 \qquad (r = -1)$$

Procedimento

1. Scrivere coefficienti del polinomio $P(x)$ e la radice da testare $r = -1$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio: regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2. Copiamo il primo coefficiente sotto

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio: regola di Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

3. Moltiplichiamo il numero più a destra della riga sotto per il coefficiente r e scriviamo il risultato nella seconda riga

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & & -2 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio: regola di Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & & -2 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

4. Sommiamo i valori della colonna così trovata e li scriviamo nella riga sotto

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & & -2 & & \\ \hline & 2 & -2 & & \end{array}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio: regola di Ruffini

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & 0 & 1 & 3 \\
-1 & & -2 & & \\
\hline
 & 2 & -2 & &
\end{array}
$$

5. Ripetiamo i passi 3 e 4 fino alla fine

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & 0 & 1 & 3 \\
-1 & & -2 & 2 & -3 \\
\hline
 & 2 & -2 & 3 & 0
\end{array}
$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio: regola di Ruffini

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & 0 & 1 & 3 \\
-1 & & -2 & 2 & -3 \\
\hline
 & 2 & -2 & 3 & 0
\end{array}
$$

Quindi si ha la fattorizzazione

$$2x^3 + x + 3 \ = \ (2x^2 - 2x + 3) \cdot (x + 1)$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Ricerca degli zeri di polinomi (maggiore del secondo grado)

Il **teorema delle radici razionali**, afferma che gli zeri razionali di un polinomio della forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

a coefficienti interi sono della forma p/q dove

- p è un divisore del termine noto a_0, e
- q è un divisore del coefficiente direttore a_n

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio (t. radici razionali)

Le radice razionali di $P(x) = 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 4x - 3$ ha i seguenti divisori

- i divisori di $a_0 = -3$ sono: $\pm 1, \ \pm 3$
- i divisori di $a_n = 2$ sono: $\pm 1, \ \pm 2$

per cui le radici razionali sono da ricercare nell'insieme

$$\left\{ \pm 1, \ \pm 3, \ \pm \frac{1}{2}, \ \pm \frac{3}{2} \right\}$$

Infatti, $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ sono zeri razionali del polinomio $P(x)$

Fattorizzazione:

$$2x^4 - x^3 + 4x^2 + 4x - 3 \ = \ (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 2x + 6)$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Equazioni riconducibili a quadratiche

Le equazioni della forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

con la sostituzione

$$t = x^n$$

diventa un'equazione quadratica

$$at^2 + bt + c = 0$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Equazioni riconducibili a quadratiche

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

La soluzione si ottiene

- risolvendo l'equazione $at^2 + bt + c = 0$ trovando le radici $\bar{t}$
- si risolve la sostituzione $x^n = \bar{t}$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio

> Fattorizzare
>
> $$x^4 + 2x^2 - 24$$

Soluzione

Poniamo $t = x^2$ allora l'equazione diventa

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

che ha soluzione

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 24}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2} = \{4, \ -6\}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio

Abbiamo la fattorizzazione

$$(t-4)(t+6) \implies (x^2-4)(x^2+6)$$

Ora

- $(x^2-4) = (x-2)(x+2)$
- (x^2+6) è irriducibile

Quindi si ha

$$x^4+2x^2-24 = (x-2)(x+2)(x^2+6)$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Chi è stato Paolo Ruffini

- Paolo Ruffini (Valentano, 22 settembre 1765 – Modena, 10 maggio 1822)
- Il 9 giugno 1788 si laureò in filosofia, medicina e chirurgia e matematica
- Dal 1797 fu professore di matematica presso l'Università di Modena
- Dal 1814 al 1822 fu Rettore dell'Università di Modena
- Oltre per la regola di Ruffini è famoso per il Teorema di Abel-Ruffini

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)