I polinomi

(Definizione / Operazioni)

Ripasso di matematica

Manolo Venturin

~~~ 1 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sui polinomi
- Somma e differenza
- Prodotto e quoziente / divisione
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Definizione di polinomio

Un polinomio è una scrittura del tipo

$$P(x) = a_n x^n \ + \ a_{n-1} x^{n-1} \ + \ \cdots \ + \ a_1 x \ + \ a_0$$

dove a_j con $j = 0, \ \ldots \ n$, sono detti coefficienti e n è detto grado

In particolare,

- a_0 è detto **termine noto**
- a_n è detto **coefficiente direttore** e se $a_n = 1$ il polinomio viene detto monico
- $a_j x^j$ è detto **monomio** o termine del polinomio

Somma e differenza

Regola: somma algebrica dei singoli monomi

Somma e differenza

Regola: somma algebrica dei singoli monomi

Ad esempio, da

- $P_1(x) = x^2 + x + 1$
- $P_2(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

si ha che

$$\begin{aligned} P_1(x) + P_2(x) &= \left(\cancel{x^2} + x + 1\right) + \left(x^3 - \cancel{x^2} + x - 1\right) = x^3 + 2x \\ P_1(x) - P_2(x) &= \left(x^2 + \cancel{x} + 1\right) - \left(x^3 - x^2 + \cancel{x} - 1\right) = -x^3 + 2x^2 + 2 \end{aligned}$$

Prodotto

Regola: legge distributiva del prodotto con la somma

Prodotto

Regola: legge distributiva del prodotto con la somma

Ad esempio, da

- $P_1(x) = x - 1$
- $P_2(x) = x^2 + x + 1$

si ha che

$$\begin{aligned} P_1(x) \cdot P_2(x) &= (x - 1) \cdot \left(x^2 + x + 1\right) \\ &= x \cdot x^2 + x \cdot x + x \cdot 1 \quad - 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 1 \cdot 1 \\ &= x^3 + \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 \\ &= x^3 - 1 \end{aligned}$$

Prodotto

Regola: legge distributiva del prodotto con la somma

Ad esempio, da

- $P_1(x) = x - 1$
- $P_2(x) = x^2 + x + 1$

si ha che

$$\begin{aligned} P_1(x) \cdot P_2(x) &= (x - 1) \cdot \left(x^2 + x + 1\right) \\ &= x \cdot x^2 + x \cdot x + x \cdot 1 \quad - 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 1 \cdot 1 \\ &= x^3 + \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 \\ &= x^3 - 1 \end{aligned}$$

Prodotto

Regola: legge distributiva del prodotto con la somma

Ad esempio, da

- $P_1(x) = x - 1$
- $P_2(x) = x^2 + x + 1$

si ha che

$$\begin{aligned} P_1(x) \cdot P_2(x) &= (x-1) \cdot \left(x^2 + x + 1\right) \\ &= x \cdot x^2 + x \cdot x + x \cdot 1 \quad - 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 1 \cdot 1 \\ &= x^3 + \cancel{x^2} + \bcancel{x} - \cancel{x^2} - \bcancel{x} - 1 \\ &= x^3 - 1 \end{aligned}$$

Divisione

- La divisione di due polinomi non è in generale un polinomio
- Ad esempio: $\frac{1}{x+1}$ non è un polinomio

Divisione

La divisione tra due polinomi $N(x)$ e $D(x)$ produce un polinomio **quoziente** $Q(x)$ e un polinomio **resto** $R(x)$, tali che

$$N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

con grado di $R(x)$ minore del grado di $D(x)$

Divisione

La divisione tra due polinomi $N(x)$ e $D(x)$ produce un polinomio **quoziente** $Q(x)$ e un polinomio **resto** $R(x)$, tali che

$$N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

con grado di $R(x)$ minore del grado di $D(x)$

Se $R(x) = 0$ allora si dice che $D(x)$ divide esattamente $N(x)$ o che $N(x)$ è **divisibile** per $D(x)$ e si ha la fattorizzazione

$$N(x) = Q(x) \cdot D(x)$$

Divisione (esempio)

Ad esempio, la divisione tra

$$N(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \quad \text{e} \quad D(x) = x + 1$$

è data da

$$\begin{array}{cccc|cc} x^3 & +x^2 & +x & +2 & x & +1 \end{array}$$

Divisione (esempio)

Ad esempio, la divisione tra

$$N(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \quad \text{e} \quad D(x) = x + 1$$

è data da

$$\begin{array}{cccc|cc} x^3 & +x^2 & +x & +2 & x & +1 \\ \hline & & & & x^2 & \end{array}$$

Divisione (esempio)

Ad esempio, la divisione tra

$$N(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \quad \text{e} \quad D(x) = x + 1$$

è data da

$$\begin{array}{cccc|cc}
x^3 & +x^2 & +x & +2 & x & +1 \\ \hline
-x^3 & -x^2 & & & x^2 & \\ \hline
0 & 0 & +x & +2 & &
\end{array}$$

Divisione (esempio)

Ad esempio, la divisione tra

$$N(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \quad \text{e} \quad D(x) = x + 1$$

è data da

$$\begin{array}{cccc|cc}
x^3 & +x^2 & +x & +2 & x & +1 \\
\hline
-x^3 & -x^2 & & & x^2 & +1 \\
\hline
0 & 0 & +x & +2 & &
\end{array}$$

Divisione (esempio)

Ad esempio, la divisione tra

$$N(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \quad \text{e} \quad D(x) = x + 1$$

è data da

$$\begin{array}{cccc|cc}
x^3 & +x^2 & +x & +2 & x & +1 \\
\hline
-x^3 & -x^2 & & & x^2 & +1 \\
\hline
0 & 0 & +x & +2 & & \\
 & & -x & -1 & & \\
\hline
 & & 0 & +1 & &
\end{array}$$

Divisione (esempio)

Ad esempio, la divisione tra

$$N(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \quad \text{e} \quad D(x) = x + 1$$

è data da

$$\begin{array}{cccc|cc}
x^3 & +x^2 & +x & +2 & x & +1 \\
\hline
-x^3 & -x^2 & & & x^2 & +1 \\
\hline
0 & 0 & +x & +2 & & \\
 & & -x & -1 & & \\
\hline
 & & 0 & +1 & &
\end{array}$$

da cui la fattorizzazione

$$x^3 + x^2 + x + 2 \; = \; (x^2 + 1) \cdot (x + 1) + 1$$

Esempio

> Trovare il polinomio che abbia gli zeri in -1, 0 e in 2 assuma il valore 6

Soluzione

Si tratta di costruire un polinomio che passi per i punti

- $(-1, 0)$
- $(0, 0)$
- $(2, 6)$

Dal momento che abbiamo 3 valori dovranno esserci 3 coefficienti
e quindi il polinomio sarà di grado 2, della forma

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Esempio

$P(x) = ax^2 + bx + c$

Punti di passaggio:

- $(-1, 0)$
- $(0, 0)$
- $(2, 6)$

Scriviamo le equazioni del polinomio nei 3 punti (valutazione)

$$\begin{cases} a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 0 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases}$$

Esempio

Il sistema ha soluzione (lo vediamo in un prossimo video come si risolvono)

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ c=0 \\ 4a+2b+c=6 \end{cases} \implies \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

da cui il polinomi

$$P(x)=x^2+x$$

Come calcolano il prodotto di due polinomi i computer?

Dati due polinomi

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i \quad \text{e} \quad P_2(x) = \sum_{j=0}^{2} a_j x^j$$

il prodotto è dato dalla formula

$$P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) = \sum_{k=0}^{r+s} c_k x^k$$

- $\sum$ è il simbolo di sommatoria: avremo tempo di verderlo bene nel corso!

Come calcolano il prodotto di due polinomi i computer?

I coefficienti dell prodotto di $P(x)$ sono dati dalle formule

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \cdot b_0 \\ c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\ \quad \vdots \\ c_k = \displaystyle\sum_{h=0}^{k} a_h b_{k-h} \\ \quad \vdots \end{cases}$$

dove la formula si può riassumere introducendo un operatore chiamato **convoluzione**

$$C = A * B$$

Come calcolano il prodotto di due polinomi i computer?

I computer calcolano la cosa attraverso la **trasforma di Fourier discreta** e la sua inversa

Perché tutto questo casino?

1. La convoluzione è lenta da calcolare così da definizione
2. Non è stabile numericamente, i.e. basta un piccolo errore che la cosa si propaga in modo significativo a tutti i coefficienti


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)