I numeri reali

(conversione e confronto)

Ripasso di matematica

Manolo Venturin

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sui numeri reali
- Definizione
- Valore assoluto
- Conversione di un numero decimale non periodico in frazione
- Conversione di un numero decimale periodico in frazione
- Divisione per zero
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Definizione dei numeri reali

> $$\mathbb{R} \; = \; \{\text{razionali e irrazionali}\}$$

Esempio di numero irrazionale (senza periodicità):

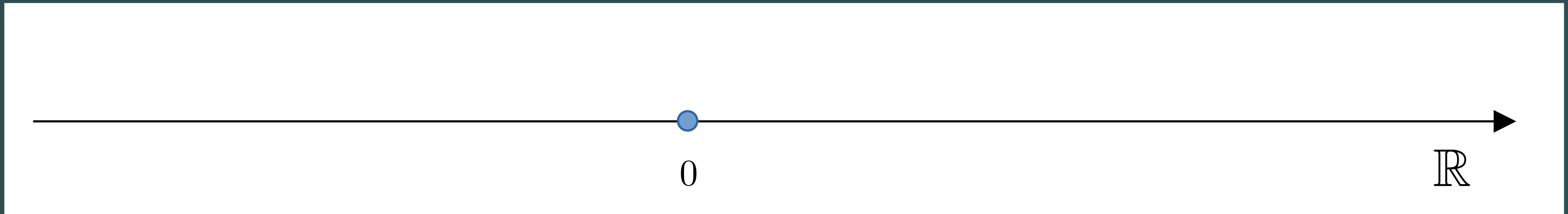
$$0.10\,100\,1000\,10000$$

Definizione dei numeri reali

$$\mathbb{R} = \{\text{razionali e irrazionali}\}$$

- Operazioni ben definite: somma, prodotto, sottrazione e divisione (diverso da 0), *radice quadrata*, …

L'insieme dei numeri reali si può identificare come i punti di una retta:



Valore assoluto

> Il valore assoluto di un numero reale x è definito come
>
> $$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ad esempio $|-3| = |3| = 3$

Conversione di un numero decimale non periodico in frazione

$$abc.de = \frac{abcde}{100}$$

- Ricetta: tutto il numero senza decimali diviso per
  - *tanti 10* quanti sono le cifre dopo la virgola
- Successivamente va semplificato numeratore con denominatore (potrebbe richiedere la scomposizione in fattori primi)

Conversione di un numero decimale non periodico in frazione

$$abc.de = \frac{abcde}{100}$$

- Ricetta: tutto il numero senza decimali diviso per
  - tanti 10 quanti sono le cifre dopo la virgola
- Successivamente va semplificato numeratore con denominatore (potrebbe richiedere la scomposizione in fattori primi)

Ad esempio,

$$2.04 = \frac{204}{100} = \frac{51}{25}$$

Conversione di un numero decimale periodico in frazione

$$a.bc\overline{def} = \frac{abcdef - abc}{99900}$$

- Ricetta: tutto il numero meno tutto quello che non è periodico diviso
  - *tanti 9* quante sono le cifre periodiche
  - *tanti 0 (o 10)* quante sono le cifre dopo la virgola non periodiche
- Successivamente va semplificato numeratore con denominatore (potrebbe richiedere la scomposizione in fattori primi)

Conversione di un numero decimale periodico in frazione

$$a.bc\overline{def} = \frac{abcdef - abc}{99900}$$

- Ricetta: tutto il numero meno tutto quello che non è periodico diviso
  - tanti 9 quante sono le cifre periodiche
  - tanti 0 (o 10) quante sono le cifre dopo la virgola non periodiche
- Successivamente va semplificato numeratore con denominatore (potrebbe richiedere la scomposizione in fattori primi)

Ad esempio,

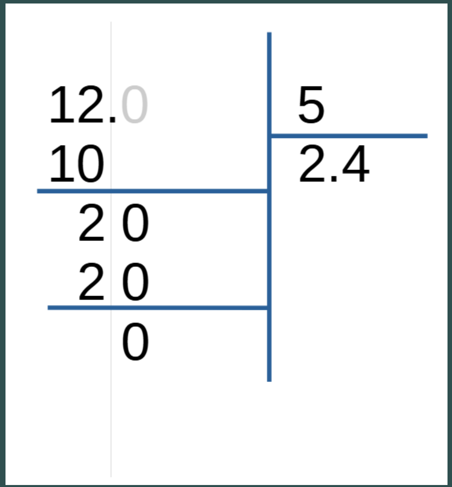
$$2.0\overline{4} = \frac{204 - 20}{90} = \frac{184}{90} = \frac{92}{45}$$

Esempio 1

> Convertire in frazione i seguenti numeri:
>
> (1) 2.4
>
> (2) 2.40

Soluzione

- $2.4 = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$
- $2.40 = \frac{240}{100} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$
  - è uguale a 2.4

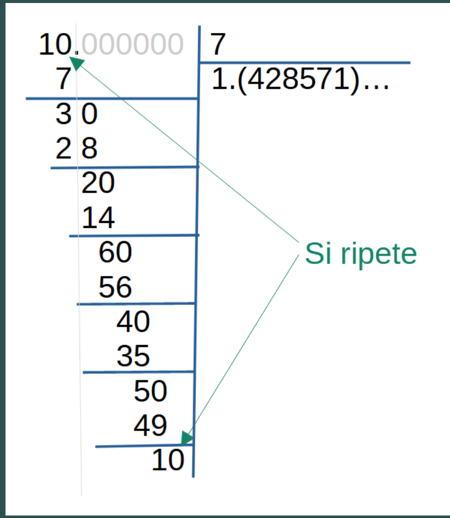


Esempio 2

> Convertire in frazione i seguenti numeri:
>
> (1) $1.\overline{3}$, (2) $1.0\overline{3}$, (3) $1.\overline{428571}$

Soluzione

- $1.\overline{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$
- $1.0\overline{3} = \frac{103-10}{90} = \frac{93}{90} = \frac{31}{30}$
- $1.\overline{428571} = \frac{1428571-1}{999999} = \frac{1428570}{999999} = \frac{10}{7}$



Verifica che $\frac{10}{7} = 1.\overline{428571}$

Confronto tra numeri

Confrontare due numeri a e b significa dire se $a > b$, $a = b$ o $a < b$

Confronto tra numeri

Confrontare due numeri a e b significa dire se $a > b, a = b$ o $a < b$

- Se i numeri da confrontare sono **naturali/interi**: il confronto è facile
  - ad esempio: $1 < 2$ e $1 > -1$

Confronto tra numeri

Confrontare due numeri a e b significa dire se $a > b$, $a = b$ o $a < b$

- Se i numeri da confrontare sono naturali/interi: il confronto è facile
  - ad esempio: $1 < 2$ e $1 > -1$

- Per i numeri espressi in forma di **frazione** bisogna ricondurre le frazioni allo *stesso denominatore* e poi eseguire il confronto dei numeratori
  - ad esempio $\frac{3}{2} > \frac{1}{4}$ perché $\frac{6}{4} > \frac{1}{4}$ e $6 > 1$ (si poteva risolvere immediatamente osservando che il primo numero è maggiore di 1 e il secondo è minore di 1

Confronto tra numeri

Confrontare due numeri a e b significa dire se $a > b$, $a = b$ o $a < b$

- Se i numeri da confrontare sono naturali/interi: il confronto è facile
  - ad esempio: $1 < 2$ e $1 > -1$
- Per i numeri espressi in forma di frazione bisogna ricondurre le frazioni allo *stesso denominatore* e poi eseguire il confronto dei numeratori
  - ad esempio $\frac{3}{2} > \frac{1}{4}$ perché $\frac{6}{4} > \frac{1}{4}$ e $6 > 1$ (si poteva risolvere immediatamente osservando che il primo numero è maggiore di 1 e il secondo è minore di 1
- Se sono presenti **radici quadrate**: i numeri vanno elevati al quadrato prima del confronto
  - ad esempio $\sqrt{2} < 3$ perché $2 < 9$

Confronto tra numeri

- Il reciproco di un numero positivo **più grande di 1 è minore di 1**, i.e.
  - se $x > 1$ allora $0 < \frac{1}{x} < 1$

Confronto tra numeri

- Il reciproco di un numero positivo più grande di 1 è minore di 1, i.e.
  - se $x > 1$ allora $0 < \frac{1}{x} < 1$
- Il reciproco di un numero positivo **compreso tra 0 e 1 è maggiore di 1**, i.e.
  - se $0 < x < 1$ allora $\frac{1}{x} > 1$

Confronto tra numeri

- Il reciproco di un numero positivo più grande di 1 è minore di 1, i.e.
  - se $x > 1$ allora $0 < \frac{1}{x} < 1$
- Il reciproco di un numero positivo compreso tra 0 e 1 è maggiore di 1, i.e.
  - se $0 < x < 1$ allora $\frac{1}{x} > 1$
- Se $x > y > 1$ allora $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$
  - Da $3 > 2$ segue che $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Confronto tra numeri

- Il reciproco di un numero positivo più grande di 1 è minore di 1, i.e.
  - se $x > 1$ allora $0 < \frac{1}{x} < 1$
- Il reciproco di un numero positivo compreso tra 0 e 1 è maggiore di 1, i.e.
  - se $0 < x < 1$ allora $\frac{1}{x} > 1$
- Se $x > y > 1$ allora $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$
  - Da $3 > 2$ segue che $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

- Per i numeri **irrazionali** bisogna utilizzare delle stime
  - ad esempio $\pi > 3$ da cui $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$

Esempio 3

> Ordinare (e disporli lungo la retta orientata) i seguenti numeri:
>
> $$0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm \frac{1}{2}, \ \frac{1}{\pi}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esempio 3

> Ordinare (e disporli lungo la retta orientata) i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm \frac{1}{2}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soluzione

Risulta immediato che

- $-2 < -1 < 0 < 1 < 2$

Esempio 3

> Ordinare (e disporli lungo la retta orientata) i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm \frac{1}{2}, \; \frac{1}{\pi}, \; \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soluzione

Risulta immediato che

- $-2 < -1 < 0 < 1 < 2$
- $-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2$

Esempio 3

> Ordinare (e disporli lungo la retta orientata) i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm \frac{1}{2}, \ \frac{1}{\pi}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soluzione

Da

- $\frac{1}{\pi} > 0$, e
- $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{2}$ perché $\pi > 2$

possiamo scrivere

$$0 < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2}$$

Esempio 3

> Ordinare (e disporli lungo la retta orientata) i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm \frac{1}{2}, \; \frac{1}{\pi}, \; \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soluzione

Quindi

$$-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2} < 1 < 2$$

Esempio 3

> Ordinare (e disporli lungo la retta orientata) i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm \frac{1}{2}, \ \frac{1}{\pi}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soluzione

Da

- $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, e razionalizzando
- $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ perché $2 > \sqrt{2} > 1$

si ha

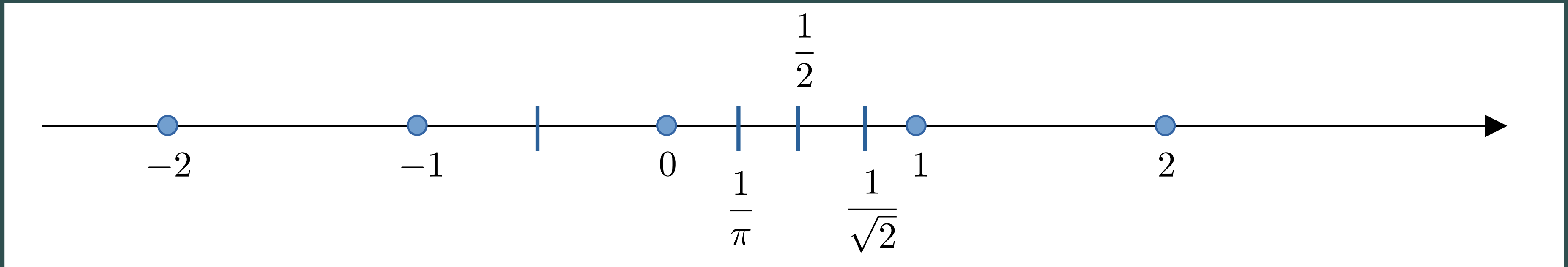
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Esempio 3

> Ordinare (e disporli lungo la retta orientata) i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm \frac{1}{2}, \ \frac{1}{\pi}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soluzione

$$-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 < 2$$



Esempio 4

> Ordinare i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm \frac{1}{\pi}, \quad \pm \frac{1}{e}, \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$
>
> e disporli lungo la retta orientata, dove $e \approx 2.7182\ldots$ è il numero di Nepero

Soluzione

Da $\pi \approx 3.14 > 3$, $e \approx 2.7 < 3$ e $\sqrt{2} \approx 1.4 < 2$ si ha

$$\sqrt{2} < e < \pi \qquad \Longrightarrow \quad 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{e} > \frac{1}{\pi} > 0$$

Per simmetria (ribaltamento rispetto all'origine) otteniamo la parte negativa

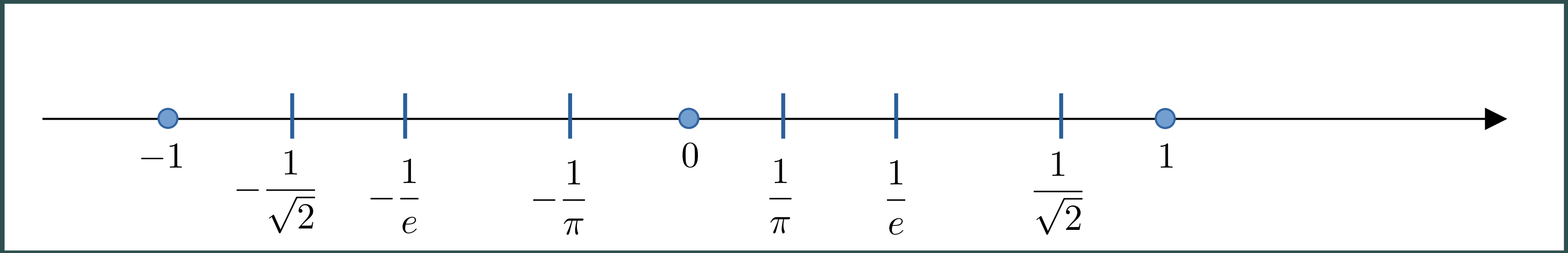
$$-1 < -\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{e} < -\frac{1}{\pi} < 0 < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{e} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Esempio 4

> Ordinare i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm \frac{1}{\pi}, \quad \pm \frac{1}{e}, \quad \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$
>
> e disporli lungo la retta orientata, dove $e \approx 2.7182\ldots$ è il numero di Nepero

Soluzione

$$-1 < -\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{e} < -\frac{1}{\pi} < 0 < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{e} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$



Esempio 5

Ordinare i seguenti numeri:

$$0, \ \pm 1, \quad \pm 2, \ 1 \pm \sqrt{2}, \ \sqrt{5 \pm \sqrt{2}}$$

e disporli lungo la retta orientata

Esempio 5

> Ordinare i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \; 1 \pm \sqrt{2}, \; \sqrt{5 \pm \sqrt{2}}$$
>
> e disporli lungo la retta orientata

Soluzione

Si ha

$$-2 < -1 < 0 < 1 < 2$$

Esempio 5

> Ordinare i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \; 1 \pm \sqrt{2}, \; \sqrt{5 \pm \sqrt{2}}$$
>
> e disporli lungo la retta orientata

Soluzione

Dal momento che $\sqrt{2} \approx 1.4$ si ha

$$1 + \sqrt{2} \approx 2.4 > 2$$

e

$$1 - \sqrt{2} \approx -0.4 \qquad \Longrightarrow \qquad -1 < 1 - \sqrt{2} < 0$$

Esempio 5

> Ordinare i seguenti numeri:
>
> $$0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,\ 1 \pm \sqrt{2},\ \sqrt{5 \pm \sqrt{2}}$$
>
> e disporli lungo la retta orientata

Soluzione

Quindi abbiamo,

$$-2 < -1 < 1 - \sqrt{2} < 0 < 1 < 2 < 1 + \sqrt{2}$$

Esempio 5

> Ordinare i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \; 1 \pm \sqrt{2}, \; \sqrt{5 \pm \sqrt{2}}$$
>
> e disporli lungo la retta orientata

Soluzione

Si ha che $\sqrt{5+\sqrt{2}}$ è maggiore di $1+\sqrt{2}$ perché

$$\sqrt{5+\sqrt{2}} > 1+\sqrt{2}$$
$$\text{(elevando al quadrato e risolvendo)}$$
$$5+\sqrt{2} > 1+2+2\sqrt{2}$$
$$2 > \sqrt{2}$$

Esempio 5

> Ordinare i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \; 1 \pm \sqrt{2}, \; \sqrt{5 \pm \sqrt{2}}$$
>
> e disporli lungo la retta orientata

Soluzione

Si ha che $\sqrt{5-\sqrt{2}} < \sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{5-\sqrt{2}} > \sqrt{3} > 1$, e quindi $1 < \sqrt{5-\sqrt{2}} < 2$

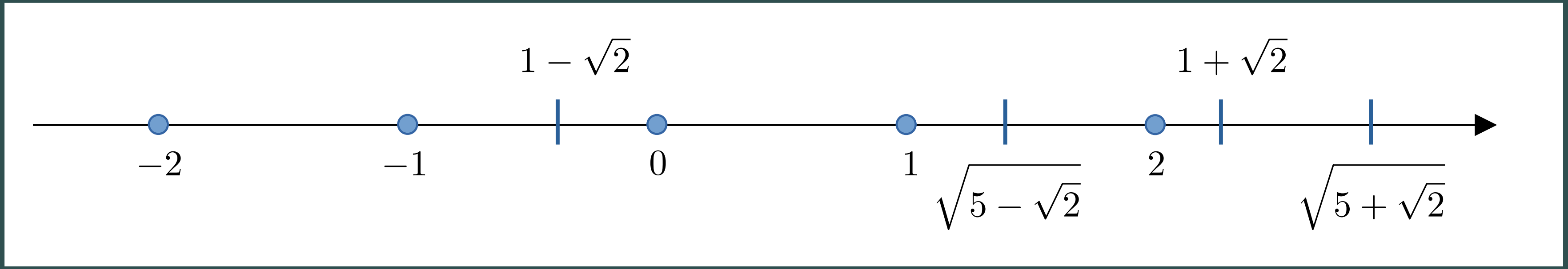
Si ha

$$-2 < -1 < 1 - \sqrt{2} < 0 < 1 < \sqrt{5-\sqrt{2}} < 2 < 1 + \sqrt{2} < \sqrt{5+\sqrt{2}}$$

Esempio 5

> Ordinare i seguenti numeri:
>
> $$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \; 1 \pm \sqrt{2}, \; \sqrt{5 \pm \sqrt{2}}$$
>
> e disporli lungo la retta orientata

Soluzione



Esempio 6

> Dimostrare che
>
> $$2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) < \sqrt{3}$$

Soluzione

$$
\begin{gathered}
2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) < \sqrt{3} \\
\text{(elevando al quadrato)} \\
4\left(5-\sqrt{10}+2\right) < 3 \\
\text{(isolando la radice)} \\
23 > 4\sqrt{10} \\
\text{(elevando nuovamente al quadrato)} \\
23^2 > 160 \\
529 > 160
\end{gathered}
$$

Divisione per zero: no grazie!

> Proviamo che $1 = 2$ (dimostrazione sbagliata perché divido per 0)

Da

$$0 \times 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad 0 \times 2 = 0$$

possiamo scrivere

$$0 \times 1 = 0 \times 2$$

che semplificato per 0 si ha

$$\frac{0}{0} \times 1 = \frac{0}{0} \times 2$$

da cui la conclusione

$$1 \;=\; 2$$

Divisione per zero: no grazie!

> Proviamo che $1 = -1$ (dimostrazione sbagliata perché divido per 0)

Da

$$x = 1$$

elevo al quadrato (ed è qui che introduco anche la soluzione -1)

$$x^2 = 1$$

Fattorizzo il binomio notevole

$$(x-1)(x+1) = 0$$

e divido per $(x-1)$, in questo caso 0, ottenendo

$$x + 1 = 0 \implies x = -1$$


FINE