Potenze e radicali

(e loro proprietà)

Ripasso di matematica

Manolo Venturin

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sulle potenze e sui radicali
- Definizione di potenza
- Proprietà delle potenze
- Definizione di radicale ed equivalenza con le potenze
- Proprietà dei radicali
- Razionalizzazione
- Esempi

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Le potenze

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Definizione di potenza

La potenza di a al numero naturale n è il prodotto di a eseguito n-volte

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$$

dove a viene detto base e n esponente

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Proprietà

1. Potenza unitaria:

$$a^1 = a$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Proprietà

1. Potenza unitaria: $a^1 = a$

2. Potenza zero:

$$a^0 = 1 \quad \text{se} \quad a \neq 0$$

dove $0^n = 0$ se $n \neq 0$

- $0^0 = 1$ se l'esponente è nel discreto (binomio di Newton)
- altrimenti 0^0 sarà una forma indeterminata (esponente reale)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Proprietà

1. Potenza unitaria: $a^1 = a$
2. Potenza zero: $a^0 = 1 \quad \text{se} \quad a \neq 0$

3. Prodotto con la stessa base:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Proprietà

4. Prodotto con lo stesso esponente:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Proprietà

4. Prodotto con lo stesso esponente: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

5. Elevamento a potenza:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Proprietà

4. Prodotto con lo stesso esponente: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

5. Elevamento a potenza: $(a^m)^n = a^{mn}$

6. Esponente negativo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{se} \quad a \neq 0$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Proprietà

7. Quoziente con la stessa base:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Proprietà

7. Quoziente con la stessa base: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

8. Quoziente con lo stesso esponente:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Proprietà

7. Quoziente con la stessa base: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

8. Quoziente con lo stesso esponente: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

9. Frazione con esponente negativo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad \text{se} \quad a \neq 0$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio

> Semplificare la seguente espressione
>
> $$\left(125^2 \div 25^2 + 5^5 \div 5^3\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$$

Soluzione

$$\left(125^2 \div 25^2 + 5^5 \div 5^3\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\left(\frac{125}{25}\right)^2 + 5^2\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \left(5^2 + 5^2\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 2 \cdot \cancel{5^2} \cdot \frac{2^2}{\cancel{5^2}} = 2^3 = 8$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio

> Semplificare la seguente espressione
>
> $$\left(125^2 \div 25^2 + 5^5 \div 5^3\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$$

Soluzione

$$\left(125^2 \div 25^2 + 5^5 \div 5^3\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\left(\frac{125}{25}\right)^2 + 5^2\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \left(5^2 + 5^2\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 2 \cdot \cancel{5}^2 \cdot \frac{2^2}{\cancel{5}^2} = 2^3 = 8$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio

> Semplificare la seguente espressione
>
> $$\left(125^2 \div 25^2 + 5^5 \div 5^3\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$$

Soluzione

$$\left(125^2 \div 25^2 + 5^5 \div 5^3\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\left(\frac{125}{25}\right)^2 + 5^2\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \left(5^2 + 5^2\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 2 \cdot \cancel{5^2} \cdot \frac{2^2}{\cancel{5^2}} = 2^3 = 8$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio

> Semplificare la seguente espressione
>
> $$\left(125^2 \div 25^2 + 5^5 \div 5^3\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$$

Soluzione

$$\left(125^2 \div 25^2 + 5^5 \div 5^3\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\left(\frac{125}{25}\right)^2 + 5^2\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \left(5^2 + 5^2\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 2 \cdot \cancel{5^2} \cdot \frac{2^2}{\cancel{5^2}} = 2^3 = 8$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

I radicali

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Definizione di radicale

Dato un numero positivo a ed un indice intero n, si definisce radice n-esima di a quel numero reale b tale che $b^n = a$ e si indica con

$$\sqrt[n]{a}$$

Quindi per definizione si ha

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

da cui si pone

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Notazione

In generale si ha

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Da questa scrittura, segue che le proprietà dei radicali sono le stesse delle proprietà delle potenze

Nota: Perché l'esponente $(\cdot)^{\frac{1}{2}}$ è la radice quadrata $\sqrt{\cdot}$?

La radice quadrata $\sqrt{a}$ è tale che $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

Allora, dalle proprietà delle potenze $\frac{1}{2}$ è proprio quel esponente che $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Razionalizzazione

- Usando la differenza tra due quadrati $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$ si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

- (variante della precedente) Usando la differenza tra due quadrati $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$ si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$$

- (variante della precedente) Usando la differenza tra due quadrati $a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$ si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{x} \pm y} = \frac{1}{\sqrt{x} \pm y} \cdot \frac{\sqrt{x} \mp y}{\sqrt{x} \mp -y} = \frac{\sqrt{x} \mp y}{x - y^2}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Razionalizzazione

- Usando il completamento della potenza $a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

- Usando il completamento generale di una potenza $a^n = a^{n-m} \cdot a^m$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{x^{(n-m)}}}{\sqrt[n]{x^{(n-m)}}} = \frac{\sqrt[n]{x^{(n-m)}}}{x}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Razionalizzazione

- Usando la somma o differenza tra due cubi $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{y})^3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x - y}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 1

> Razionalizzare la seguente espressione
>
> $$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Soluzione

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

> Razionalizzare la seguente espressione
>
> $$\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}}$$

Soluzione

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[\cancel{3}]{5^{\cancel{3}}}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

> Razionalizzare la seguente espressione
>
> $$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

Soluzione

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{(\sqrt{3})^2-1} = \frac{\cancel{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\cancel{3-1}} = \sqrt{3}+1$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 4

> Razionalizzare la seguente espressione
>
> $$\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$$

Soluzione

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt{3}+1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt{3}+1} = \frac{\cancel{2}\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt{3}+1\right)}{\cancel{3}-1} = \sqrt[3]{3^2}+\sqrt{3}+1$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Curiosità: la spirale di Teodoro

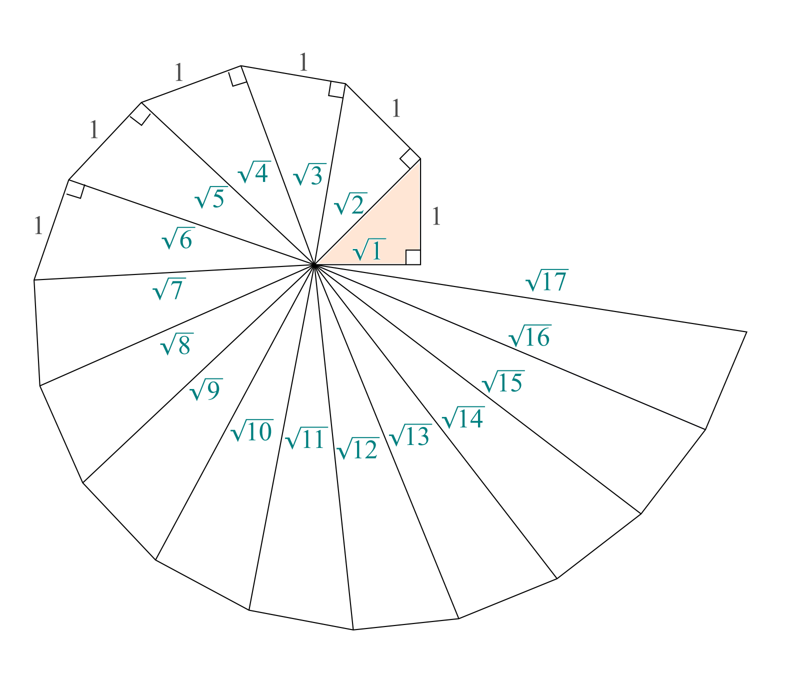
Permette di costruire geometricamente le radici quadrate dei numeri interi

Il processo è iterativo:

- si parte da un triangolo rettangolo isoscele di lato 1
- un nuovo triangolo viene costruito sull'ipotenusa del precedente aggiungendo un lato di lunghezza 1

Applicando il teorema di Pitagora partendo da un'ipotenusa di lunghezza $\sqrt{n}$ si ha che la nuova ipotenusa misura

$$\sqrt{(\sqrt{n})^2 + 1^2} = \sqrt{n+1}$$



Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)