I numeri razionali

(e loro semplificazioni)

Ripasso di matematica

Manolo Venturin

~~~ 1 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sui numeri razionali
- Definizione dei razionali e equivalenza degli interni con i razionali
- Frazione irriducibile
- Ordinamento nei razionali
- Esempio con lo scomporre
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

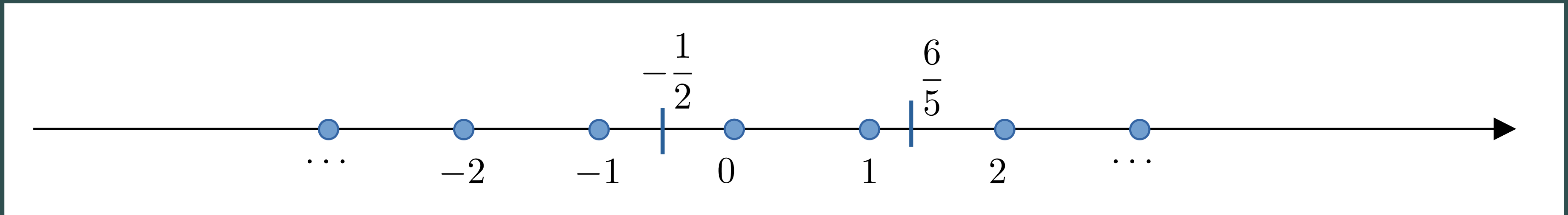
Grazie!

Definizione dei razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

- Numeri con rappresentazione *decimale finita* e *numeri periodici*
- Esistono numeri che non sono razionali: ad es. $\sqrt{2}$, π, e,
- Operazioni ben definite (il risultato sta in $\mathbb{Q}$): somma, prodotto, sottrazione e *divisione* (diverso da 0)

- Ordinamento sulla retta



Rappresentazione di un intero come frazione

Ogni numero intero n può essere scritto come frazione, i.e.

$$n = \frac{n}{1}$$

e viceversa

Ad esempio

$$3 = \frac{3}{1}$$

Rappresentazione di un intero come frazione

Per un numero negativo $-n$ possiamo avere le seguenti scritture equivalenti

$$-n = \frac{-n}{1} = \frac{n}{-1} = -\frac{n}{1}$$

Ad esempio

$$-3 = \frac{-3}{1} = -\frac{3}{1} = \frac{3}{-1}$$

Frazione irriducibile (o in forma canonica)

Una frazione $\frac{a}{b}$ è detta **irriducibile** (o in forma canonica) se non può essere semplificata, in questo caso si dice che a e b sono coprimi tra loro (i.e. $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$)

Questa forma si ottiene dividendo il numeratore e il denominatore per il loro massimo comun divisore e se b è negativo cambiando il segno tra numeratore e denominatore

Frazione irriducibile (o in forma canonica)

Una frazione $\frac{a}{b}$ è detta **irriducibile** (o in forma canonica) se non può essere semplificata, in questo caso si dice che a e b sono coprimi tra loro (i.e. $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$)

Questa forma si ottiene dividendo il numeratore e il denominatore per il loro massimo comun divisore e se b è negativo cambiando il segno tra numeratore e denominatore

Ad esempio

$$\frac{1-9}{1-7} = \frac{-8}{-6} = \frac{8}{6} = \frac{4 \cdot \cancel{2}}{3 \cdot \cancel{2}} = \frac{4}{3}$$

Uguaglianza

Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono uguali, e scriveremo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e solo se, il prodotto incrociato è uguale, i.e.

$$ad = bc$$

Se le frazioni sono in forma canonica (semplificate), allora $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e solo se

$$a = c \quad \text{e} \quad b = d$$

Uguaglianza

Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono uguali, e scriveremo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e solo se, il prodotto incrociato è uguale, i.e.

$$ad = bc$$

Se le frazioni sono in forma canonica (semplificate), allora $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e solo se

$$a = c \quad \text{e} \quad b = d$$

Ad esempio, per trovare il valore di x affinché le seguenti due frazioni

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{12}$$

siano uguali, bisogna risolvere l'equazione

$$2 \cdot 12 = 3 \cdot x \implies x = \frac{2 \cdot 12}{3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = 8$$

Addizione e sottrazione

Si definisce

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

che va poi semplificata per portarla alla forma canonica

Addizione e sottrazione

Si definisce

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

che va poi semplificata per portarla alla forma canonica

Ad esempio, si ha

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{10} = \frac{50 + 36}{120} = \frac{86}{120} = \frac{43 \cdot \cancel{2}}{60 \cdot \cancel{2}} = \frac{43}{60}$$

Per semplificare i calcoli si utilizza il mcm

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{10} = \frac{5}{2^2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 3}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{25 + 18}{60} = \frac{43}{60}$$

Opposto

L'opposto, rispetto all'elemento neutro della addizione, relativo alla frazione $\frac{a}{b}$ è definito come

$$-\left(\frac{a}{b}\right) = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$$

e ha la proprietà

$$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a-a}{b} = 0$$

dove $0 = \frac{0}{1}$ è l'elemento neutro dell'addizione

Moltiplicazione

La moltiplica tra le due frazione $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ è definita come

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Moltiplicazione

La moltiplica tra le due frazione $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ è definita come

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Di solito si usa la scomposizione in fattori primi dei numeri a, b, c e d per semplificare (in modo incrociato) il calcolo

Ad esempio

$$\left(-\frac{125}{14}\right) \cdot \left(-\frac{14}{5}\right) = +\frac{125}{14} \cdot \frac{14}{5} = \frac{\cancel{5} \cdot 25}{\cancel{14}} \cdot \frac{\cancel{14}}{\cancel{5}} = \frac{25}{1} = 25$$

Inverso

L'inverso, rispetto all'elemento neutro della moltiplicazione, della frazione $\frac{a}{b}$ è definito come

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}$$

e ha la proprietà

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = 1$$

dove $1 = \frac{1}{1}$ è l'elemento neutro della moltiplicazione

Divisione

La divisione tra le due frazione $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ è definita come

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Divisione

La divisione tra le due frazione $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ è definita come

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Di solito si usa la scomposizione in fattori primi dei numeri a, b, c e d per semplificare (in modo incrociato) il calcolo

Ad esempio

$$\frac{\frac{125}{8}}{\frac{5}{12}} = \frac{125}{8} \cdot \frac{12}{5} = \frac{\cancel{5} \cdot 25}{\cancel{4} \cdot 2} \cdot \frac{\cancel{4} \cdot 3}{\cancel{5}} = \frac{75}{2}$$

Ordinamento

Date due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ in forma canonica (e quindi con denominatore positivo), si ha che

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

se

$$ad < bc$$

Ordinamento

Date due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ in forma canonica (e quindi con denominatore positivo), si ha che

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

se

$$ad < bc$$

Ad esempio

$$-\frac{2}{3} < -\frac{1}{6}$$

perché $-12 < -3$

Ordinamento

Analogamente si poteva ragionare portando allo stesso denominatore le due frazioni

$$-\frac{2}{3} < -\frac{1}{6} \iff -\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2} < -\frac{1}{6}$$

perché

$$-\frac{2\cdot 2}{\cancel{3\cdot 2}}\cdot \cancel{6} < -1\cdot -\frac{1}{\cancel{6}}\cancel{6} \iff -4 < -1$$

Potenza con esponente intero

Per quanto riguarda le potenze abbiamo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

Se $a \neq 0$ si ha

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$

Esempio

Semplificare la seguente espressione

$$\frac{\left(6-4\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{100}}{\left(6\cdot\frac{1}{40}-\frac{53}{20}\right)\cdot 4-\frac{1}{5}}$$

Soluzione

$$\frac{\left(6-4\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{100}}{\left(6\cdot\frac{1}{40}-\frac{53}{20}\right)\cdot 4-\frac{1}{5}} = \frac{(6-2)\cdot\frac{3}{100}}{\left(\frac{3}{20}-\frac{53}{20}\right)\cdot 4-\frac{1}{5}} = \frac{4\cdot\frac{3}{100}}{\left(-\frac{50}{20}\right)\cdot 4-\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{\frac{3}{25}}{-\frac{50}{5}-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{3}{25}}{-\frac{51}{5}} = -\frac{3}{25}\cdot\frac{5}{51}$$

$$= -\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}\cdot 5}\cdot\frac{\cancel{5}}{17\cdot\cancel{3}} = -\frac{1}{5\cdot 17} = -\frac{1}{85}$$

Proprietà dello scomporre

> Dimostrare che se
>
> $$a : b = c : d$$
>
> allora
>
> $$(a - c) : (b - d) = a : b \quad (= c : d)$$
>
> se $b \neq d$ (altrimenti sarebbe anche $a = c$ e avrei il caso $\frac{0}{0}$)

Scrivere $a : b$ è uguale a scrivere a/b o $\frac{a}{b}$

Proprietà dello scomporre

Soluzione

L'idea della dimostrazione è la seguente:

- partiamo dalla frazione $(a-c):(b-d)$
- dividiamo numeratore e denominatore per b
- sfruttiamo l'ipotesi $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
- raccogliamo i fattori comuni e poi semplifichiamo l'espressione

$$(a-c):(b-d) = \frac{a-c}{b-d} = \frac{\frac{a-c}{b}}{\frac{b-d}{b}} = \frac{\frac{a}{b}-\frac{c}{b}}{\frac{b-d}{b}} = \frac{\frac{c}{d}-\frac{c}{b}}{\frac{b-d}{b}}$$

$$= c\,\frac{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}}{\frac{b-d}{b}} = c\,\frac{\frac{\cancel{b-d}}{\cancel{b}\,d}}{\frac{\cancel{b-d}}{\cancel{b}}} = \frac{c}{d}$$

Esempio con lo scomporre

> In un triangolo la differenza tra la base e l'altezza è $4\ \mathrm{cm}$ e la base è $\frac{3}{2}$ dell'altezza. Calcolare la base e l'altezza.

Soluzione

Scriviamo la proporzione tra base e altezza

$$b : h \; = \; 3 : 2$$

e il vincolo tra i due

$$b - h = 4$$

Esempio con lo scomporre

Applicando lo scomporre a $b : h \; = \; 3 : 2$ si ha

$$(b-h) : h \; = \; (3-2) : 2$$

e inserendo il vincolo $b - h = 4$ otteniamo

$$4 : h \; = \; (3-2) : 2$$

da cui

$$h \; = \; \frac{4 \times 2}{1} \; = \; 8$$

e di conseguenza

$$b \; = \; h + 4 \; = \; 8 + 4 \; = \; 12$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)