m.c.m e M.C.D

(Minimo Comune Multiplo / Massimo Comun Divisore / Numeri pari e dispari)

Ripasso di matematica

Manolo Venturin

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ripasso sul minimo comune multiplo
- Massimo Comun Divisore
- Numeri pari e dispari
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Il minimo comune multiplo: mcm

> Dati due numeri a e b il minimo comune multiplo $\mathrm{mcm}(a,b)$ è definito come il **più piccolo** numero intero positivo **multiplo** di entrambi

- si generalizza facilmente a più numeri
- si calcola a partire dalla scomposizione in fattori primi dei numeri
- è il prodotto di **tutti i fattori primi (comuni e non comuni)**, presi **una sola volta con il massimo esponente**

Esempio di mcm

> Calcolare il $\mathrm{mcm}(12,\ 280,\ 900)$

Passo 1: calcolo della fattorizzazione in numeri primi

- $12 \ = \ 4 \times 3 \ = \ 2^2 \times 3$
- $280 \ = \ 28 \times 10 \ = \ (7 \times 4) \times (5 \times 2) \ = \ 2^3 \times 5 \times 7$
- $900 \ = \ 9 \times 100 \ = \ 9 \times (25 \times 4) \ = \ 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

Esempio di mcm

> Calcolare il $\mathrm{mcm}(12,\ 280,\ 900)$

Passo 1: calcolo della fattorizzazione in numeri primi

- $12 \;=\; 4 \times 3 \;=\; 2^2 \times 3$
- $280 \;=\; 28 \times 10 \;=\; (7 \times 4) \times (5 \times 2) \;=\; 2^3 \times 5 \times 7$
- $900 \;=\; 9 \times 100 \;=\; 9 \times (25 \times 4) \;=\; 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

Passo 2: calcolo del m.c.m.

Tutti i fattori primi con il massimo esponente

$$\begin{aligned} \mathrm{mcm}(12,\ 280,\ 900) &= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \\ &= 8 \times 9 \times 25 \times 7 \\ &= 12600 \end{aligned}$$

Il massimo comun divisore: MCD

> Dati due numeri a e b il massimo comun divisore $\mathrm{MCD}(a, b)$ è definito come il numero naturale **più grande** per il quale possono essere **divisi** entrambi

- si generalizza facilmente a più numeri
- si calcola a partire dalla scomposizione in fattori primi dei numeri
- è il prodotto di **tutti i fattori primi comuni** considerati una sola volta con il loro **esponente più piccolo**

Esempio di MCD

> Calcolare il $\mathrm{MCD}(12,\ 280,\ 900)$

Passo 1: calcolo della fattorizzazione in numeri primi

- $12 = 2^2 \times 3$
- $280 = 2^3 \times 5 \times 7$
- $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

Esempio di MCD

> Calcolare il $\mathrm{MCD}(12,\ 280,\ 900)$

Passo 1: calcolo della fattorizzazione in numeri primi

- $12 = 2^2 \times 3$
- $280 = 2^2 \times 2 \times 5 \times 7$
- $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

Passo 2: calcolo del M.C.D.

Tutti i fattori primi comuni con l'esponente più piccolo

$$\mathrm{MCD}(12,\ 280,\ 900) \ = \ 2^2 \ = \ 4$$

Esercizio

> Calcolare il mcm e MCD di $24,\ 84,\ 144$

<u>Passo 1: calcolo della fattorizzazione in numeri primi</u>

- $24\ =\ 4\times 6\ =\ 2\times 2\times 2\times 3\ =\ 2^3\times 3$
- $84\ =\ 4\times 21\ =\ 2\times 2\times 3\times 7\ =\ 2^2\times 3\times 7$
- $144\ =\ 3\times 48\ =\ 3\times 6\times 8 = 2^4\times 3^2$

Esercizio

> Calcolare il mcm e MCD di $24,\ 84,\ 144$

Passo 1: calcolo della fattorizzazione in numeri primi

- $24 \ = \ 4 \times 6 \ = \ 2 \times 2 \times 2 \times 3 \ = \ 2^3 \times 3$
- $84 \ = \ 4 \times 21 \ = \ 2 \times 2 \times 3 \times 7 \ = \ 2^2 \times 3 \times 7$
- $144 \ = \ 3 \times 48 \ = \ 3 \times 6 \times 8 = 2^4 \times 3^2$

Passo 2: calcolo del m.c.m. e M.C.D.

- $\mathrm{mcm}(24,\ 84,\ 14) \ = \ 2^4 \times 3^2 \times 7 \ = \ 1008$

Esercizio

> Calcolare il mcm e MCD di $24,\ 84,\ 144$

<u>Passo 1: calcolo della fattorizzazione in numeri primi</u>

- $24 \ = \ 4 \times 6 \ = \ 2 \times 2 \times 2 \times 3 \ = \ 2^2 \times 2 \times 3$
- $84 \ = \ 4 \times 21 \ = \ 2 \times 2 \times 3 \times 7 \ = \ 2^2 \times 3 \times 7$
- $144 \ = \ 3 \times 48 \ = \ 3 \times 6 \times 8 = 2^2 \times 2^2 \times 3 \times 3$

<u>Passo 2: calcolo del m.c.m. e M.C.D.</u>

- $\mathrm{mcm}(24,\ 84,\ 14) \ = \ 2^4 \times 3^2 \times 7 \ = \ 1008$
- $\mathrm{MCD}(24,\ 84,\ 14) \ = \ 2^2 \times 3 \ = \ 12$

Numeri coprimi

> Due numeri a e b si dicono **coprimi** se il $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$

Ad esempio, 4 e 9 sono coprimi tra loro in quanto le due fattorizzazioni

- $4 \;=\; 2^2$
- $9 \;=\; 3^2$

non hanno nessun primo in comune e quindi il $\mathrm{MCD}(4,\ 9) = 1$

Numeri pari e dispari

L'insieme dei **numeri pari**

$$\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \dots\ \}$$

può essere scritto come

$$\{2k : k \in \mathbb{N}\}$$

Numeri pari e dispari

L'insieme dei **numeri pari**

$$\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \dots\}$$

può essere scritto come

$$\{2k : k \in \mathbb{N}\}$$

L'insieme dei **numeri dispari**

$$\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots\}$$

può essere scritto come

$$\{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$$

L'algoritmo di Euclide

- Permette di calcolare il $\mathrm{MCD}(a, b)$
- Non si basa sulla fattorizzazione in numeri primi di a e b
- Si parte con la condizione $a > b$
- L'idea è che se $\mathrm{MCD}(a, b)$ divide sia a che b allora divide anche la differenza $a - b$ e quindi si ha la formula di ricorrenza

$$\mathrm{MCD}(a, b) = \mathrm{MCD}(b, r)$$

  dove $a = qb + r$
- Il $\mathrm{mcm}(a, b)$ si calcola dalla relazione

$$a \cdot b = \mathrm{MCD}(a, b) \cdot \mathrm{mcm}(a, b)$$

L'algoritmo di Euclide (esempio)

> Calcolare $\mathrm{MCD}(84, 24)$ e $\mathrm{mcm}(24, 12)$

- $\mathrm{MCD}(84, 24)$
- Ora $84 = 3 \times 24 + 12$
- $\mathrm{MCD}(24, 12)$
- Ora $24 = 2 \times 12 + 0$
- $\mathrm{MCD}(12, 0) \implies 12$
- $\mathrm{mcm}(24, 12) = \frac{84 \cdot 24}{12} = 84 \times 2 = 168$


FINE